


64


STEPHEN KIMBROUGH · DAMJAN ŠTRUS

ELFMETER



 Elfmeterschießen, Kombinatorik, Spieltheorie

 Mathematik, Informatik, Physik

 14–18 Jahre

1 | ZUSAMMENFASSUNG

Bei diesem Projekt müssen die Schüler unter Berücksichtigung aller internen und externen Einflüsse (d. h. Geometrie, Reaktionszeit, Wahl der Seite) die Wahrscheinlichkeit eines erfolgreichen Elfmeters berechnen.

Die Schüler können außerdem die perfekte Reihenfolge für ein Elfmeterschießen finden und nach einer „fairen“ Alternative zu dieser Lösung suchen.

2 | VORSTELLUNG DES KONZEPTS

Elfmeterschießen wurde in den 1970er-Jahren in die FIFA-Regeln für Fußballweltmeisterschaften aufgenommen.

Es findet dann statt, wenn in einem Spiel nach der Verlängerung, d. h. nach der zusätzlichen Spielzeit, noch immer Gleichstand herrscht. Vor der Einführung dieser neuen Regel wurde der Gewinner per Münzwurf ermittelt.

Elfmeterschießen gehört zu den spannendsten Situationen in einem Fußballspiel.

In dieser Unterrichtseinheit analysieren wir wie man das Ergebnis für ein bestimmtes Team maximieren könnte.

Die Unterrichtseinheit ist in zwei Teile untergliedert: Im ersten Teil berechnen die Schüler die Wahrscheinlichkeit, mit einem einzigen Schuss ein Tor zu schießen. Im zweiten Teil lernen sie, wie ein Elfmeterschießen optimiert werden kann.

3 | AUFGABE DER SCHÜLER

3 | 1 Ein einzelner Elfmeterschuss

Um herauszufinden, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Elfmeter in ein Tor verwandelt wird, müssen wir den Elfmeterschuss in zwei voneinander unabhängige Bewegungen unterteilen: die des Torwarts und die des Elfmeterschützen.

Zunächst weisen wir dem Torwart auf der Basis von Trigonometrie bestimmte Wahrscheinlichkeiten zu.

Das Fußballtor ist ein Rechteck mit einer Breite von 7,32 m und einer Höhe von 2,44 m. Die Größe eines Torwarts liegt bei etwa 2 m und seine Armspannweite ebenfalls bei ca. 2 m. Die Schüler können die Fläche, die der Torwart abdeckt, mit der Fläche des Fußballtors vergleichen. So können sie ermitteln, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass der Torwart den Ball hält.

Weitere Aspekte sind die Reaktionszeit des Torwarts sowie die Zeit, die er benötigt, um den Ball zu erreichen.

Die Schüler sollten zunächst einmal raten, wohin man am besten zielen sollte. Die Antwort: in die oberen Ecken des Tors. Dann müssen sie mit Trigonometrie den Abstand zu einem dieser Punkte ausrechnen. Die Zeit, die der Ball im Flug verbringt, kann berechnet werden ($t = \frac{s}{v}$), ausgehend von der Annahme, dass die Durchschnittsgeschwindigkeit des Balls 100 km/h beträgt. Der Torwart hat so lange Zeit, zu reagieren und in die richtige Ecke zu springen.

Die Schüler können dann ihre eigene Reaktionszeit mit einem Lineal messen, das ein Schüler fallen lässt und ein anderer aufhängt (siehe S. 30). Mit Hilfe der Strecke, die das Lineal gefallen ist, lässt sich die Reaktionszeit berechnen:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

g : Gravitationsbeschleunigung; $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

t : Zeit [s]

h : zurückgelegte Strecke [m]

Wenn man die Reaktionszeit subtrahiert, erhält man die Zeit, die dem Torwart bleibt, um die Distanz bis zum Ball zu überwinden. Er benötigt also eine anfängliche Geschwindigkeit von $v = \frac{x}{t}$, um den Ball zu erreichen. Die Durchschnittsgeschwindigkeit eines Sportlers beim Sprung liegt bei etwa 16 km/h.

Wenn die Schüler die beiden Geschwindigkeiten vergleichen, dann sehen sie, dass der Torwart den Ball nie erreichen könnte. Daraus kann man schließen, dass der Torwart sich vor dem Schuss ohne Reaktionszeit für eine Ecke entscheiden muss.

Die Schüler können dann das Tor in zwei Hälften unterteilen und berechnen, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass man es schafft, den Ball aus einer Hälfte des Tors fernzuhalten. Dazu gehen sie wie oben beschrieben vor. Diese Berechnung kann auch nach einer Aufteilung des Tors in Drittel durchgeführt werden.

Es ist schwierig, Wahrscheinlichkeiten für den Elfmeterschützen zu berechnen, allgemein kann man aber sagen, dass ein Linksfuß besser in die rechte Ecke und ein Rechtsfuß besser in die linke Ecke zielen kann.

Die Schüler können Daten sammeln, indem sie zehn- oder zwanzigmal oder noch öfter auf ein leeres Tor schießen und dann die Genauigkeit ihrer Schüsse berechnen. Die Schüler sollten dann ein Programm zur Simulation eines Elfmeterschusses schreiben oder den Quellcode aus dem Anhang verwenden^[1]. Zunächst müssen die Schüler ihre Wahrscheinlichkeitsdaten eingeben. Sowohl beim Torwart als auch beim Schützen wird die Richtung nach dem Zufallsprinzip gewechselt. Wenn man das Gesetz der großen Zahlen berücksichtigt, kann man die Wahrscheinlichkeit eines Tors beim Elfmeterschießen durch die Erhöhung der Anzahl an Schüssen steigern. Auf dieser Basis können die Schüler die Frage untersuchen, ob eine Änderung der Strategie beim



ABB. 1 Perspektive des Elfmeterschützen



ABB. 2 Perspektive des Torwarts

Schießen zu einer höheren oder einer geringeren Treffergenauigkeit führt. Die Schüler können dann mit ihren jeweiligen Codes gegeneinander antreten.

3 | 2 Perspektive des Elfmeterschützen

Elfmeterschießen läuft immer gleich ab. Fünf Spieler aus jedem Team werden nominiert, um in einer festen Reihenfolge zu schießen. Eine Münze entscheidet, welche Mannschaft zuerst schießen darf. Die Teams wechseln sich dann mit ihren Elfmeterschüssen ab.

Die Schüler bekommen eine Liste der Spieler mit ihrer durchschnittlichen Trefferquote. Dann wählen sie fünf dieser Spieler aus und bestimmen die Reihenfolge, in der sie schießen sollen. Zwei Schüler treten in einem in Scratch 2 programmierten Spiel gegeneinander an.^[2] Anschließend müssen die Schüler zeigen, ob ihre Aufstellung wirklich die bestmögliche ist. Da die durchschnittliche Wahrscheinlichkeit eines Tors

$p = \frac{[p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5]}{5}$ ist, sind alle Aufstellungen gleichwertig.

In einem echten Fußballspiel gibt es jedoch, anders als in der Computersimulation, ein Problem: Während des Elfmeterschießens wird der Druck auf jeden Elfmeterschützen mit der Zeit immer größer. Dieser Wert kann bei etwa 5 % angesetzt werden. So erhalten wir die folgende Gleichung für die durchschnittliche Wahrscheinlichkeit:

$$p = \frac{[p_1 + 0.95p_2 + 0.90p_3 + 0.85p_4 + 0.80p_5]}{5}$$

Da wir $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ mögliche Aufstellungen haben, müssen die Schüler einen Weg finden, das Ergebnis zu optimie-

ren. Es sollte den Schülern überlassen bleiben, eine Lösung für das Problem zu finden, auch wenn die tatsächlich beste Lösung die ist, den schwächsten Schützen zuerst schießen zu lassen und sich dann bis zum stärksten Elfmeterschützen zum Schluss durchzuarbeiten.

Nach diesem Prinzip können die Schüler das Scratch-2-Programm an ihre Erfordernisse anpassen.^[2]

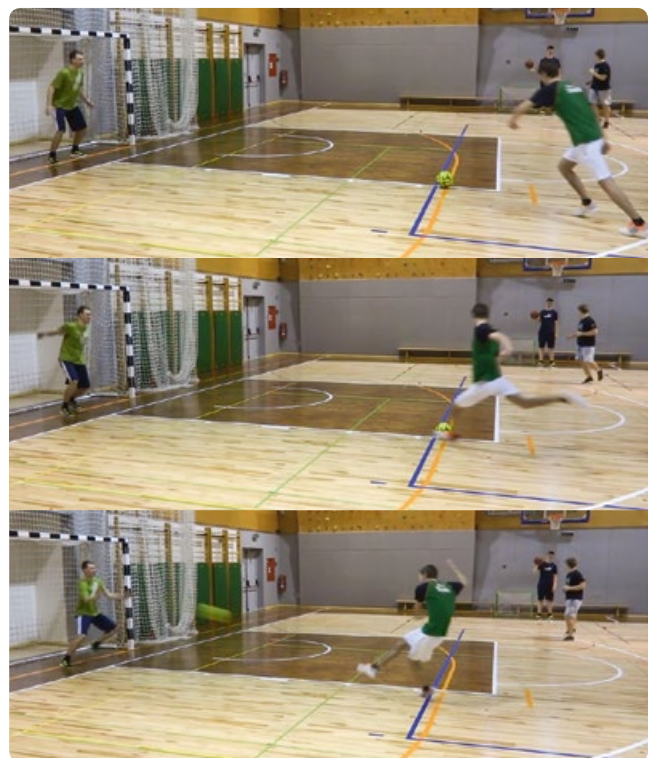


ABB. 3 Ablauf eines Elfmeterschießens

Die nächste Variable, die hier eine Rolle spielt, ist der psychologische Effekt, wenn der ersten Mannschaft auf Anhieb ein Tor gelingt. Diese Situation setzt den nächsten Elfmeterschützen noch stärker unter Druck.

Als Nächstes können die Schüler zwei gleich starke Teams vergleichen, das Programm variieren und viele Simulationen durchführen. Dies führt zu der Schlussfolgerung, dass die Mannschaft, die anfängt, eine höhere Chance hat, das Elfmeterschießen zu gewinnen.

Die Schüler sollten dann darüber diskutieren, was eine faire Regel fürs Elfmeterschießen wäre. Dann sollten sie diese Regel mit dem o. g. Programm testen und herausfinden, ob fünf Schüsse ausreichen, um ein zufriedenstellendes Ergebnis zu erzielen.

Die fairste Abfolge für Team A und B mit jeweils acht Spielern wäre AB BA BA AB. Dies wird auch als Morsefolge oder Thue-Morse-Sequenz bezeichnet. Die Abfolge der schießenden Mannschaften muss verändert werden, und auch die Veränderung muss variiert werden.

4 | FAZIT

Die Schüler lernen, wie man ein Szenario aus dem echten Leben modellhaft darstellt und mathematisch analysiert. Außerdem sehen sie wie sie ihre Programmierkenntnisse zur Lösung von Problemen einsetzen können, die durch komplexe Situationen hervorgerufen werden, und sie lernen, ihre eigene Simulation eines Elfmeterschießens zu programmieren.

5 | OPTION ZUR KOOPERATION

Die Schüler können einen Wettbewerb innerhalb der Klasse oder gegen eine andere Schule organisieren, um zu sehen, welche Elfmeterstrategie die beste ist (siehe 3.1).

Eine weitere Idee wäre, dass die Schüler versuchen, die Fußballregeln durch Veränderung der Größe und Form des Tors zu „verbessern“. Was würde beim Elfmeterschießen passieren, wenn das Tor rund oder dreieckig wäre?

QUELLEN

^[1] www.science-on-stage.de/iStage3_Materialien/

^[2] <https://scratch.mit.edu/scratch2download/>



IMPRESSUM

ENTNOMMEN AUS

iStage 3 – Fußball im MINT-Unterricht
verfügbar in Deutsch, Englisch, Französisch, Polnisch,
Spanisch, Schwedisch, Tschechisch, Ungarisch
www.science-on-stage.de/istage3

HERAUSGEBER

Science on Stage Deutschland e.V.
Poststraße 4/5
10178 Berlin

REVISION UND ÜBERSETZUNG

TransForm Gesellschaft für Sprachen- und Mediendienste mbH
www.transformcologne.de

TEXT- UND BILDNACHWEISE

Die Autoren haben die Bildrechte für die Verwendung in
dieser Publikation nach bestem Wissen geprüft und sind für
den Inhalt ihrer Texte verantwortlich.

GESTALTUNG

WEBERSUPIRAN.berlin

ILLUSTRATION

Tricom Kommunikation und Verlag GmbH
www.tricom-agentur.de

BESTELLUNGEN

www.science-on-stage.de
info@science-on-stage.de

Zur besseren Lesbarkeit wurde auf die Verwendung der
weiblichen Form verzichtet. Mit der männlichen Form ist
stets auch die weibliche Form gemeint.

Creative-Commons-License: Attribution Non-Commercial
Share Alike



1. Auflage 2016

© Science on Stage Deutschland e.V.



SCIENCE ON STAGE – THE EUROPEAN NETWORK FOR SCIENCE TEACHERS

- ... ist ein Netzwerk von Lehrkräften für Lehrkräfte aller Schularten, die Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften und Technik (MINT) unterrichten.
- ... bietet eine Plattform für den europaweiten Austausch anregender Ideen und Konzepte für den Unterricht.
- ... sorgt dafür, dass MINT im schulischen und öffentlichen Rampenlicht steht.

Science on Stage Deutschland e.V. wird maßgeblich gefördert von think ING., der Initiative für den Ingenieur Nachwuchs des Arbeitgeberverbandes GESAMTMETALL.

Machen Sie mit!

WWW.SCIENCE-ON-STAGE.DE

- Newsletter: www.science-on-stage.de/newsletter
- www.facebook.com/scienceonstagedeutschland
- www.twitter.com/SonS_D

Science on Stage Deutschland ist Mitglied in Science on Stage Europe e.V.

WWW.SCIENCE-ON-STAGE.EU

- www.facebook.com/scienceonstageeurope
- www.twitter.com/ScienceOnStage