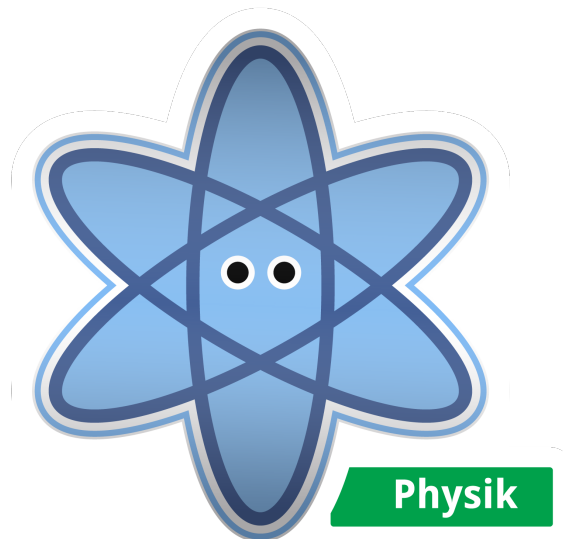




ESERO-Unterrichtsmaterial

Die Raketengleichung: Wie schnell fliegen Raketen?



Anwendung der Raketengleichung

Informationen

Übersicht

Jahrgangsstufe	10-13
Unterrichtsfach	Physik/Mathematik
Niveau	Mittel
Zeitbedarf	1 Schulstunde
Themen	Raketengleichung Impulse

Lernziele

In diesem Projekt sollen die SchülerInnen

... Berechnungen mit dem natürlichen Logarithmus durchführen.

... die Geschwindigkeitsänderung am Beispiel einer Rakete untersuchen.

... eine vorgegebene Gleichung für Berechnungen nutzen. ... die Herleitung der Raketengleichung durch Impulserhaltung verstehen.

Dieses Projekt kann als inhaltliche Vorbereitung für ESA Wettbewerbe wie die „Moon Camp Challenge“ benutzt werden.

Didaktische Anmerkung

Vorbereitung

Die SchülerInnen sollten über Grundlagen der Rechnung mit Logarithmen verfügen. Nach verständlicher Einführung durch die Lehrkraft oder durch eigenständiges Erarbeiten der beigelegten Grundlagen/Einführung kann das Arbeitsblatt als Hausaufgabe erarbeitet werden.

©ESERO Germany (CC BY-NC-ND 2.0 DE)

Stundenplanung

1. Die SchülerInnen lesen die Einführung und die Aufgaben durch. Daraufhin können erste Fragen im Plenum geklärt werden.
2. Die SchülerInnen bearbeiten die Aufgabe 1 in Einzelarbeit. Die Lehrkraft steht bei Fragen zur Verfügung und hilft Schülern, die Probleme beim der Bearbeitung haben.
3. Damit alle Schüler das richtige Ergebnis für die fortlaufenden Aufgabe 2 haben, sollte die Lehrkraft zwischendurch die Ergebnisse an der Tafel besprechen bzw. Tipps geben.
4. Für Aufgabe 2 können sich zwei oder drei SchülerInnen zusammensetzen und gemeinsam die Verständnisfragen lösen.
5. Am Ende der Stunde kann die Lehrkraft das Prinzip der Stufentanks vertieft erklären, da das Verstehen der erreichten Geschwindigkeit der "Saturn 5" ein entscheidendes Lernziel dieser Aufgaben ist.
6. Es gibt ein Informationsblatt mit Zusatzinformationen zur Herleitung der Raketengleichung. Diese kann von der Lehrkraft benutzt werden zum besseren Verständnis für Erklärungen oder den SchülerInnen zur eigenständigen Erarbeitung ausgeteilt werden.

Lösungen

Aufgabe 1: Geschwindigkeit einer Rakete „Modell P“

$$\text{Startmasse } m_0 = 2.940.000 \text{ kg} \quad (0.11)$$

$$\text{Endmasse } m_{\text{End}} = m_0 - m_{\text{Treibstoff}} = 240.000 \text{ kg} \quad (0.12)$$

$$\text{Gasgeschwindigkeit } v_g = 2600 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (0.13)$$

$$\text{Anfangsgeschwindigkeit am Start } v_0 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (0.14)$$

$$\text{Endgeschwindigkeit } v_{\text{End}} = v_g \ln \frac{m_0}{m_{\text{End}}} + v_0 \quad (0.15)$$

$$= 2600 \frac{\text{m}}{\text{s}} \ln \frac{2.940.000 \text{ kg}}{240.000 \text{ kg}} \quad (0.16)$$

$$= 6514,4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 6514,4 \cdot \frac{60 \cdot 60}{1000} \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad (0.17)$$

$$= 6514,4 \cdot 3,6 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 23.451,8 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad (0.18)$$

Antwort: Die Geschwindigkeit der Rakete beträgt $6514,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ bzw. $23.451,8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Aufgabe 2: Vergleich mit der Rakete "Saturn 5"

Vergleicht nun die Endgeschwindigkeiten der Raketen des Modells P und der Rakete "Saturn 5". Was fällt euch auf? Was könnte die unterschiedlichen Geschwindigkeiten hervorrufen? Schaut euch dazu zum Beispiel die Raketengleichung (siehe Einführung) an. → Die Endgeschwindigkeiten der beiden Raketen sind unterschiedlich. Die Geschwindigkeit, die die Saturn 5 erreicht, beträgt $8684,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Beide Raketen haben das gleiche Anfangs- und Endgewicht, die gleiche Menge Gas und das Gas strömt mit der gleichen Geschwindigkeit v_g aus den Triebwerken. Für die Endgeschwindigkeit macht es jedoch einen Unterschied, ob das Gas auf einmal oder nacheinander in Etappen gezündet wird. Durch das Abwerfen der leeren Triebwerke kann sie $8684,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 6514,3 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2169,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ schneller fliegen. → Es ist effizienter, eine Rakete mit mehreren Tanks zu konstruieren anstatt nur einen Tank einzubauen. Die Rakete kann leere Triebwerke abwerfen. Dann transportiert die Rakete nicht so viel Gewicht. Der Impuls durch den Treibstoff bleibt gleich groß, aber durch die geringere Masse wird die Geschwindigkeit der Rakete höher (siehe Einleitung, Formel für den Impuls). Die Endgeschwindigkeiten einer Saturn 5 in Weltraummissionen ist höher als $8000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Zusatzinformation: Herleitung der Raketengleichung

Das Bezugssystem, in dem der Schwerpunkt der Rakete ruht, ist der Gesamtimpuls zur Zeit t immer null (siehe Einleitung).

In der Zeit Δt wird die Gasmasse Δm mit der Relativgeschwindigkeit $v_g < 0$ ausgestoßen, wodurch sich die Geschwindigkeit der Rakete um Δv ändert. Also gilt mit $\Delta m = m_2 - m_1 < 0$ und der Geschwindigkeit der Gasmasse relativ zum Schwerpunkt $\Delta v + v_g$ (mit $v_g < 0$ und $\Delta v > 0$):

$$\begin{aligned} 0 &= -\Delta m (\Delta v + v_g) + (m + \Delta m) \Delta v \\ \Leftrightarrow 0 &= -\Delta m \Delta v - \Delta m v_g + m \Delta v + \Delta m \Delta v \\ \Leftrightarrow 0 &= -\Delta m v_g + m \Delta v \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta m}{\Delta t} v_g &= m \frac{\Delta v}{\Delta t} \end{aligned}$$

Während des Brennstoffverbrauchs verringert sich die Masse m der Rakete und die Geschwindigkeitsänderungen Δv werden bei gleicher Ausströmgeschwindigkeit w und gleicher Rate des Brennstoffverbrauchs $\Delta m / \Delta t$ immer größer:

$$\Delta v = v_g \frac{\Delta m}{m}$$

Die gesamte Geschwindigkeitsänderung, eine Summation der Änderungen Δv , lässt sich mithilfe der Integralrechnung bestimmen. Aus $\Delta v = v_g \frac{\Delta m}{m}$ folgt

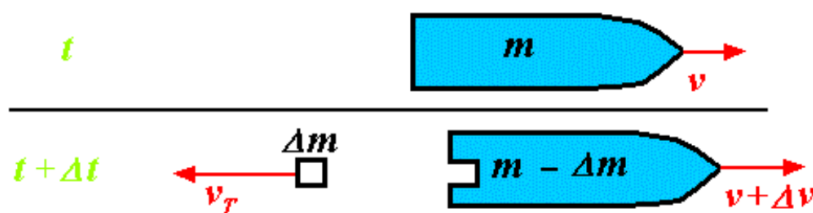
$$\int_{v_1}^{v_2} dv = v_g \int_{m_1}^{m_2} \frac{1}{m} dm \quad (0.19)$$

Durch Integration ergibt sich die Raketengleichung aus der Einführung:

$$v_2 - v_1 = v_g [\ln m]_{m_1}^{m_2} = v_g (\ln m_2 - \ln m_1) = -v_g \ln \frac{m_1}{m_2} \quad (0.20)$$

Diese Formel gibt an, um wie viel die Geschwindigkeit zunimmt, wenn die Masse der Rakete durch den Ausstoß der Verbrennungsgase von m_1 auf m_2 abnimmt. Bei einer mehrstufigen Rakete wird die Masse m_2 noch zusätzlich durch Abstoßen der ausgebrannten Stufe verringert.

(Quelle: Metzler Physik)



Vorwärtsbewegung einer Rakete durch Impulsänderung. (Quelle: Raketen: Geschichte, Physik und Technik, D. Gembris, 2012/13)