Bestimmung eines Dreiecks aus Seite, nicht zugehöriger Seitenhalbierender und Höhe der gegebenen Seite

Mögliche Kombinationen: (a, s_b, h_a), (a, s_c, h_a), (b, s_a, h_b), (b, s_c, h_b), (c, s_a, h_c), (c, s_b, h_c)

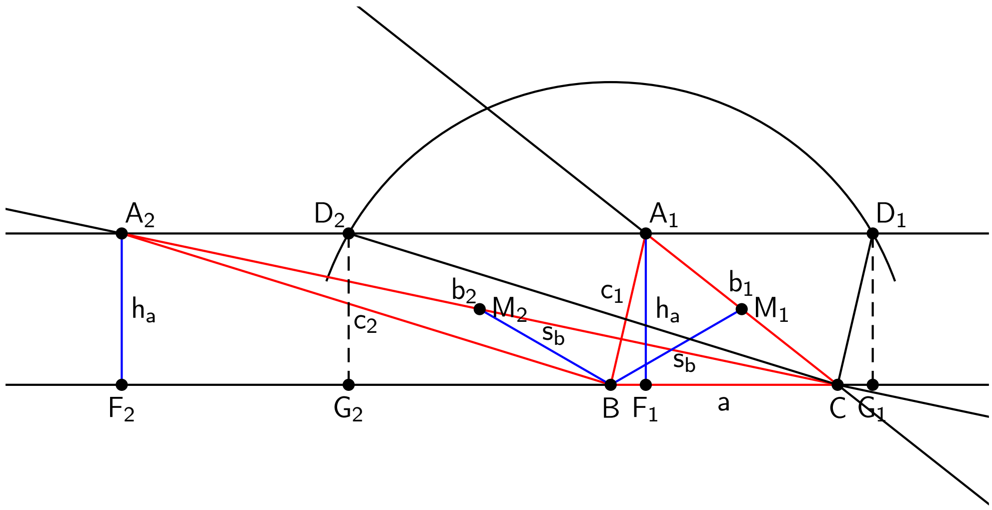
Gegeben:	$a,\ s_b,\ h_a$
Gesucht:	$b,\ c$
Voraussetzung:	$2\,s_b \geq h_a$

Konstruktion:

Strecke [BC] mit Länge a
D_1 liegt
1. auf einer der Parallelen zu BC im Abstand h_a
2. auf dem Kreis um B mit Radius $2\,s_b$

M_1 ist der Mittelpunkt von B und D_1.
A_1 liegt
1. auf der schon verwendeten Parallele zu BC im Abstand h_a
2. auf der Geraden CM_1

2. Lösung entsprechend!



Begründung der Konstruktion:

D_1 und D_2 sind so gewählt, dass $\mathsf{BCD}_1\mathsf{A}_1$ und $\mathsf{BCD}_2\mathsf{A}_2$ Parallelogramme sind. $[\mathsf{BD}_1]$ bzw. $[\mathsf{BD}_2]$ ist eine Diagonale des jeweiligen Parallelogramms. Da sich die Diagonalen eines Parallelogramms halbieren, gilt $\overline{\mathsf{BD}_1} = 2\,s_b$ bzw. $\overline{\mathsf{BD}_2} = 2\,s_b$. Daher müssen D_1 und D_2 auf dem Kreis um B mit Radius $2\,s_b$ liegen. Die gesuchte Ecke (A_1 bzw. A_2) muss von der Geraden BC den Abstand h_a haben, sich also auf einer der Parallelen zu BC im Abstand h_a befinden.

Rechnung:

F_1, F_2, G_1, G_2 seien die Fußpunkte der Lote von A_1, A_2, D_1, D_2 auf die Gerade BC.

1. Lösung:

Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathsf{BF}_1} &= \overline{\mathsf{BG}_1} - \overline{\mathsf{F}_1\mathsf{G}_1} \\
&= \sqrt{4s_b^2 - h_a^2} - a
\end{aligned}$$

Für die gesuchte Seitenlänge c_1 erhält man, wieder gemäß Pythagoras:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \sqrt{\overline{\mathsf{BF}_1}^2 + h_a^2} \\
&= \sqrt{\left(\sqrt{4s_b^2 - h_a^2} - a\right)^2 + h_a^2} \\
&= \sqrt{(4s_b^2 - h_a^2) - 2a\sqrt{4s_b^2 - h_a^2} + a^2 + h_a^2} \\
&= \sqrt{a^2 + 4s_b^2 - 2a\sqrt{4s_b^2 - h_a^2}}
\end{aligned}$$

Zur Berechnung von b_1 lässt sich die Formel für die Seitenhalbierende s_b verwenden:

$$\begin{aligned}
s_b &= \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c_1^2 - b_1^2} \\
b_1^2 &= 2a^2 + 2c_1^2 - 4s_b^2 \\
&= 2a^2 + 2\left(a^2 + 4s_b^2 - 2a\sqrt{4s_b^2 - h_a^2}\right) - 4s_b^2 \\
&= 4a^2 + 4s_b^2 - 4a\sqrt{4s_b^2 - h_a^2} \\
b_1 &= 2\sqrt{a^2 + s_b^2 - a\sqrt{4s_b^2 - h_a^2}}
\end{aligned}$$

2. Lösung:

Durch entsprechende Überlegungen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathsf{BF_2}} &= \overline{\mathsf{BG_2}} + \overline{\mathsf{F_2G_2}} \\
&= \sqrt{4s_b^2 - h_a^2} + a \\
c_2 &= \sqrt{a^2 + 4s_b^2 + 2a\sqrt{4s_b^2 - h_a^2}} \\
b_2 &= 2\sqrt{a^2 + s_b^2 + a\sqrt{4s_b^2 - h_a^2}}
\end{aligned}$$

Walter Fendt, 3. April 2023