Bestimmung eines Dreiecks

aus Seite, zugehöriger Höhe und weiterer Höhe

Mögliche Kombinationen: (a, h_a, h_b), (a, h_a, h_c), (b, h_b, h_a), (b, h_b, h_c), (c, h_c, h_a), (c, h_c, h_b)

Gegeben:	$a,\ h_a,\ h_c$
Gesucht:	$b,\ c$

Konstruktion:

Strecke [BC] mit Länge a

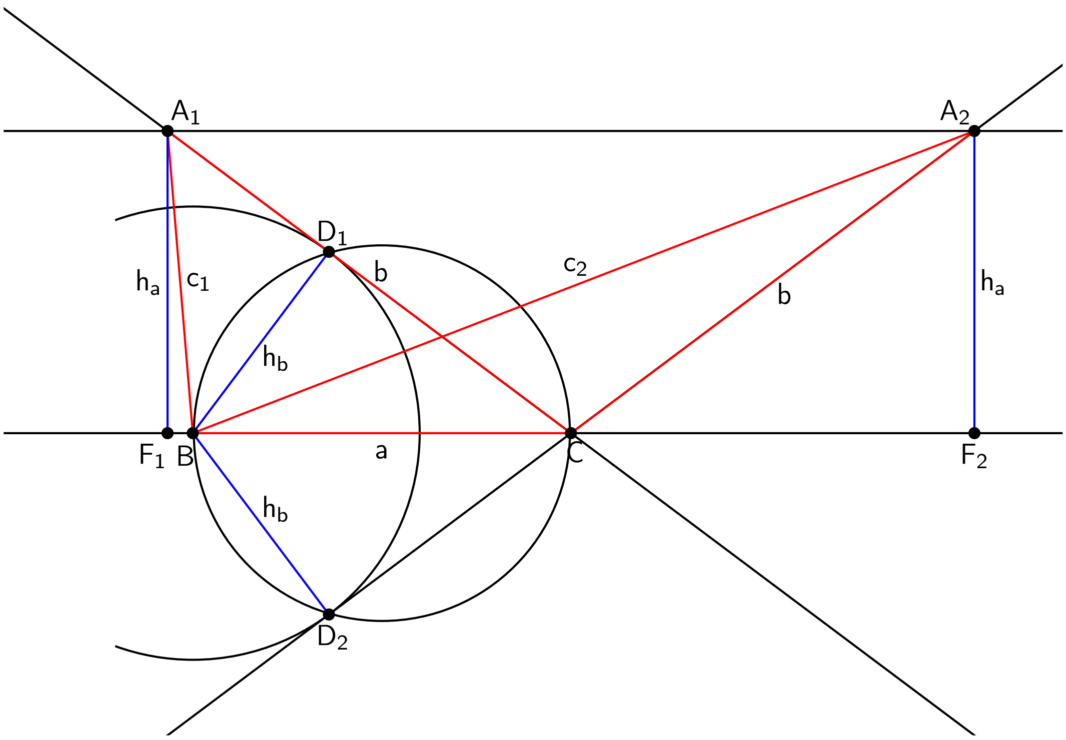
D_1 liegt

1. auf dem Thaleskreis über [BC]
2. auf dem Kreis um B mit Radius h_b

A_1 liegt

1. auf der Geraden CD_1
2. auf einer der Parallelen zu BC im Abstand h_a

2. Lösung entsprechend!



Begründung der Konstruktion:

Der Höhenfußpunkt D_1 bzw. D_2 muss wegen des rechten Winkels auf dem Thaleskreis über $[\mathsf{AB}]$ liegen. Die Ecke A_1 bzw. A_1 muss von der Geraden AB den Abstand h_a haben und sich folglich auf einer der Parallelen zu AB im Abstand h_a befinden.

Rechnung:

Die Seitenlänge b erhält man aus der Formel für den Flächeninhalt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,a\,h_a &= \frac{1}{2}\,b\,h_b \\ b &= \frac{a\,h_a}{h_b}\end{aligned}$$

1. Lösung:

F_1 sei der Fußpunkt des Lotes von A_1 auf BC. Für die Streckenlänge $\overline{\mathsf{F}_1\mathsf{B}}$ gilt nach Pythagoras:

$$\begin{aligned}\overline{\mathsf{F}_1\mathsf{B}} &= \overline{\mathsf{F}_1\mathsf{C}} - \overline{\mathsf{BC}} \\ &= \sqrt{b^2 - h_a^2} - a \\ &= \sqrt{\left(\frac{a\,h_a}{h_b}\right)^2 - h_a^2} - a \\ &= \frac{h_a}{h_b}\sqrt{a^2 - h_b^2} - a\end{aligned}$$

Erneute Anwendung des Satzes von Pythagoras liefert die Seitenlänge c_1:

$$\begin{aligned}c_1 &= \sqrt{\overline{\mathsf{F}_1\mathsf{B}}^2 + h_a^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{h_a}{h_b}\sqrt{a^2 - h_b^2} - a\right)^2 + h_a^2} \\ &= \sqrt{\frac{h_a^2}{h_b^2}\,(a^2 - h_b^2) - \frac{2\,a\,h_a}{h_b}\sqrt{a^2 - h_b^2} + a^2 + h_a^2} \\ &= \frac{1}{h_b}\sqrt{h_a^2\,(a^2 - h_b^2) - 2\,a\,h_a\,h_b\sqrt{a^2 - h_b^2} + (a^2 + h_a^2)\,h_b^2} \\ &= \frac{1}{h_b}\sqrt{a^2\,(h_a^2 + h_b^2) - 2\,a\,h_a\,h_b\sqrt{a^2 - h_b^2}}\end{aligned}$$

2. Lösung:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathsf{BF_2}} &= \overline{\mathsf{CF_2}} + \overline{\mathsf{BC}} \\
&= \sqrt{b^2 - h_a^2} + a \\
&= \sqrt{\left(\frac{a\,h_a}{h_b}\right)^2 - h_a^2} + a \\
&= \frac{h_a}{h_b}\sqrt{a^2 - h_b^2} + a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2 &= \sqrt{\overline{\mathsf{BF_2}}^2 + h_a^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{h_a}{h_b}\sqrt{a^2 - h_b^2} + a\right)^2 + h_a^2} \\
&= \sqrt{\frac{h_a^2}{h_b^2}\,(a^2 - h_b^2) + \frac{2\,a\,h_a}{h_b}\sqrt{a^2 - h_b^2} + a^2 + h_a^2} \\
&= \frac{1}{h_b}\sqrt{h_a^2\,(a^2 - h_b^2) + 2\,a\,h_a\,h_b\sqrt{a^2 - h_b^2} + (a^2 + h_a^2)\,h_b^2} \\
&= \frac{1}{h_b}\sqrt{a^2\,(h_a^2 + h_b^2) + 2\,a\,h_a\,h_b\sqrt{a^2 - h_b^2}}
\end{aligned}$$

Quelle: Steffen Polster, Mathematik alpha, Lexikon (2. Lösung ergänzt)
`mathematikalpha.de/lexikon`

Walter Fendt, 26. März 2023