## Bestimmung eines Dreiecks

## aus Seite, zugehöriger und weiterer Seitenhalbierender

Mögliche Kombinationen: $(a, s_a, s_b)$, $(a, s_a, s_c)$, $(b, s_b, s_a)$, $(b, s_b, s_c)$, $(c, s_c, s_a)$, $(c, s_c, s_b)$

| | |
|---|---|
| Gegeben: | $b,\ s_b,\ s_c$ |
| Gesucht: | $a$ |
| Voraussetzung: | $4\,s_b^2 + 8\,s_c^2 > 3\,b^2$ |

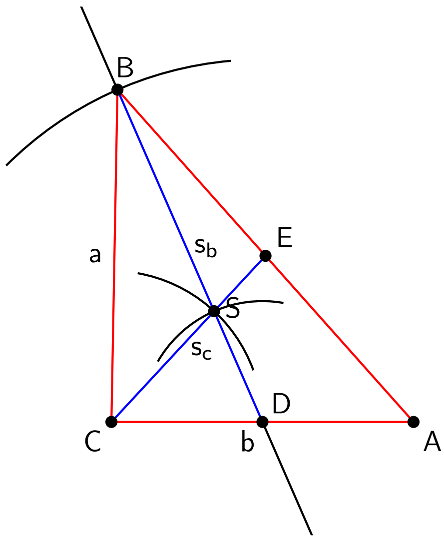
**Konstruktion:**

Hilfskonstruktion von $\frac{1}{3}\,s_b$ und $\frac{2}{3}\,s_c$ (Strahlensatz)
Strecke [CA] mit Länge $b$
D sei der Mittelpunkt von [CA].
S liegt

1. auf dem Kreis um D mit Radius $\frac{1}{3}\,s_b$
2. auf dem Kreis um C mit Radius $\frac{2}{3}\,s_c$

B liegt

1. auf der Geraden DS
2. auf dem Kreis um D mit Radius $s_b$




**Begründung der Konstruktion:**

Die Seitenhalbierenden des Dreiecks schneiden sich im Schwerpunkt S, und zwar im Verhältnis 2 : 1 (längerer Abschnitt jeweils zwischen Ecke und Schwerpunkt). Daher gilt $\overline{\mathsf{DS}} = \frac{1}{3}\,s_b$ und $\overline{\mathsf{CS}} = \frac{2}{3}\,s_c$.

**Rechnung:**

Die Längen der Seitenhalbierenden ($s_b$ und $s_c$) lassen sich durch die Seitenlängen des Dreiecks ausdrücken.

$$\begin{aligned}
s_b &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} \\
s_c &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} \\
4\,s_b^2 &= 2a^2 + 2c^2 - b^2 \\
4\,s_c^2 &= 2a^2 + 2b^2 - c^2
\end{aligned}$$

Um die Seitenlänge $c$ zu eliminieren, wird nun zur vorletzten Gleichung das Doppelte der letzten Gleichung addiert.

$$\begin{aligned}
4\,s_b^2 + 8\,s_c^2 &= 6a^2 + 3b^2 \\
6\,a^2 &= 4\,s_b^2 + 8\,s_c^2 - 3\,b^2
\end{aligned}$$

Für die gesuchte Seitenlänge erhält man also:

$$a = \frac{1}{6}\sqrt{24\,s_b^2 + 48\,s_c^2 - 18\,b^2}$$

Walter Fendt, 20. März 2023