Konstruktion eines Dreiecks aus den Höhen

Aufgabe: Ein Dreieck ABC ist zu konstruieren aus den Längen der drei Höhen, also aus h_a, h_b und h_c.

Vorüberlegungen: Der Flächeninhalt eines Dreiecks lässt sich mit der Formel $A = \frac{1}{2}gh$ berechnen, wobei g für die gewählte Grundseite steht und h für die zugehörige Höhe. Auflösen dieser Formel nach g ergibt

$$g = 2A \cdot \frac{1}{h}.$$

Zwei Seitenlängen eines Dreiecks verhalten sich demnach zueinander wie die Kehrwerte der entsprechenden Höhen. Ein Dreieck, dessen Seitenlängen (direkt) proportional zu $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$ und $\frac{1}{h_c}$ sind, ist also dem gesuchten Dreieck ähnlich.

Die im Folgenden genannten Seitenlängen a', b' und c' erfüllen diese Bedingung:

$$a' = \frac{h_a h_c}{h_a} = h_c; \qquad b' = \frac{h_a h_c}{h_b}; \qquad c' = \frac{h_a h_c}{h_c} = h_a$$

Hat man aus diesen Seitenlängen ein Hilfsdreieck konstruiert, so erhält man durch eine geeignete zentrische Streckung das endgültige Dreieck ABC.

Konstruktionsplan:

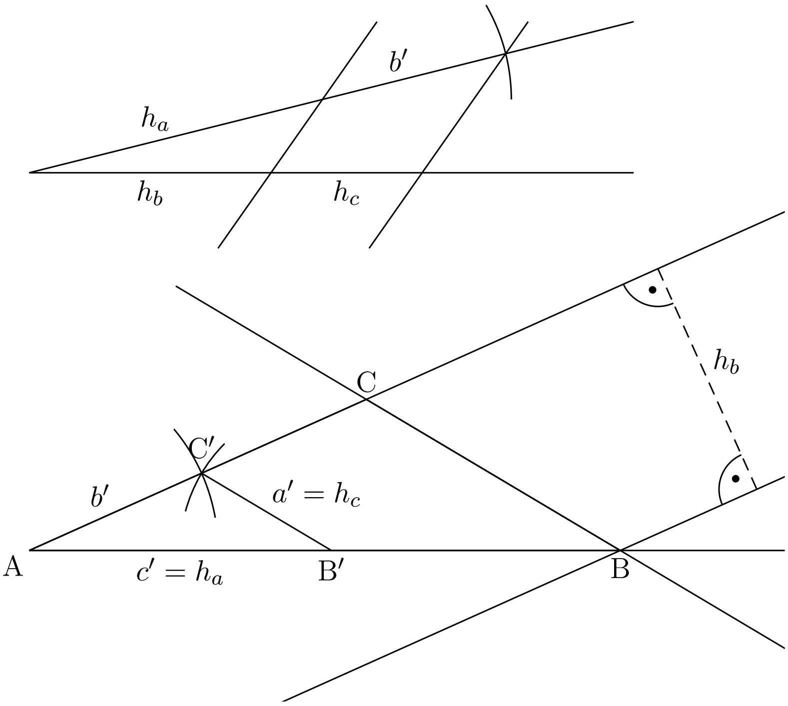
a) Konstruktion von $b' = \frac{h_a h_c}{h_b}$ mit Hilfe des Strahlensatzes

b) Konstruktion des zum gesuchten Dreieck ähnlichen Hilfsdreiecks AB′C′ aus $a' = \overline{\mathrm{B'C'}} = h_c$, $b' = \overline{\mathrm{AC'}} = \frac{h_a h_c}{h_b}$ und $c' = \overline{\mathrm{AB'}} = h_a$

c) B liegt
   1. auf der Geraden AB′,
   2. auf der Parallelen zu AC′ im Abstand h_b (auf der Seite von B′)

d) C liegt
   1. auf der Geraden AC′,
   2. auf der Parallelen zu B′C′ durch B.

Beispiel: $h_a = 4{,}0$ cm; $h_b = 3{,}2$ cm; $h_c = 2{,}0$ cm



Walter Fendt, 20. April 2006