Bestimmung eines Dreiecks aus Seite, anliegendem Winkel und zugehöriger Winkelhalbierender

Mögliche Kombinationen: (a, β, w_β), (a, γ, w_γ), (b, α, w_α), (b, γ, w_γ), (c, α, w_α), (c, β, w_β)

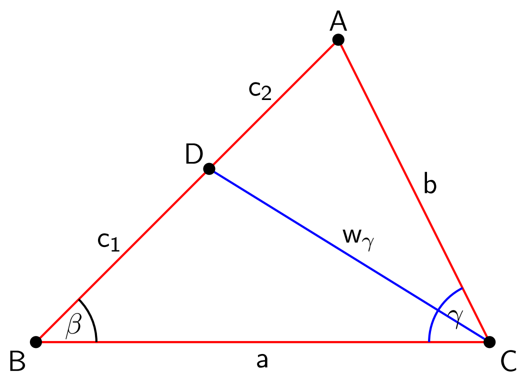
Gegeben:	a, γ, w_γ
Gesucht:	b

Konstruktion:

Dreieck BCD mit $\overline{\mathsf{BC}} = a$, $\overline{\mathsf{CD}} = w_\gamma$ und $\angle\,\mathsf{BCD} = \frac{\gamma}{2}$

A liegt

1. auf der Geraden BD
2. auf dem freien Schenkel von γ, angetragen an [BC] in C



Rechnung:

D sei der Schnittpunkt der Seite [AB] mit der Winkelhalbierenden. $c_1 = \overline{\mathsf{BD}}$ und $c_2 = \overline{\mathsf{DA}}$ seien die Längen der Teilstrecken von c.

Durch Anwendung des Sinussatzes, einmal für das gesamte Dreieck ABC, einmal für das Teildreieck BCD, erhält man:

$$\sin\beta = \frac{b\,\sin\gamma}{c}$$

$$\sin\beta = \frac{w_\gamma\,\sin\frac{\gamma}{2}}{c_1}$$

Die rechten Seiten werden gleichgesetzt:

$$\begin{aligned}
\frac{b\,\sin\gamma}{c} &= \frac{w_\gamma\,\sin\frac{\gamma}{2}}{c_1} \\
b\,c_1\,\sin\gamma &= c\,w_\gamma\,\sin\frac{\gamma}{2} \\
b\,c_1\,\sin\left(2\cdot\frac{\gamma}{2}\right) &= c\,w_\gamma\,\sin\frac{\gamma}{2} \\
2\,b\,c_1\sin\frac{\gamma}{2}\,\cos\frac{\gamma}{2} &= c\,w_\gamma\,\sin\frac{\gamma}{2} \\
2\,b\,c_1\,\cos\frac{\gamma}{2} &= c\,w_\gamma
\end{aligned}$$

Da die Winkelhalbierende ihre Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt, gilt:

$$c \;=\; c_1 + c_2 = c_1\left(1+\frac{c_2}{c_1}\right) = c_1\left(1+\frac{b}{a}\right) = c_1\cdot\frac{a+b}{a}$$

Durch Einsetzen in die vorige Gleichung erhält man weiter:

$$\begin{aligned}
2\,b\,c_1\,\cos\frac{\gamma}{2} &= c_1\cdot\frac{a+b}{a}\cdot w_\gamma \\
2\,a\,b\,\cos\frac{\gamma}{2} &= (a+b)\,w_\gamma \\
2\,a\,b\,\cos\frac{\gamma}{2} - b\,w_\gamma &= a\,w_\gamma \\
b\left(2\,a\,\cos\frac{\gamma}{2} - w_\gamma\right) &= a\,w_\gamma \\
b &= \frac{a\,w_\gamma}{2\,a\,\cos\frac{\gamma}{2} - w_\gamma}
\end{aligned}$$

Walter Fendt, 20. März 2023