Bestimmung eines Dreiecks

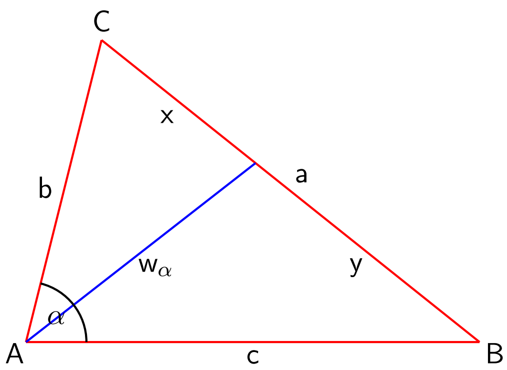
aus zwei Seiten und einer zugehörigen Winkelhalbierenden

Mögliche Kombinationen: (a, b, w_α), (a, b, w_β), (a, c, w_α), (a, c, w_γ), (b, c, w_β), (b, c, w_γ)

Gegeben:	$a,\ b,\ w_\alpha$
Gesucht:	c

Konstruktion:

Eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal ist nicht möglich, wie sich im folgenden Abschnitt herausstellen wird.



Rechnung:

Eine Winkelhalbierende im Dreieck teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten. Für die Winkelhalbierende w_α gilt demnach:

$$x : y \quad = \quad b : c$$

Berücksichtigt man auch $x + y = a$, so lassen sich die Längen der Teilstrecken durch die Seitenlängen a, b, c ausdrücken:

$$x = \frac{b}{b+c} \cdot a; \qquad y = \frac{c}{b+c} \cdot a$$

Nun wird der Kosinussatz auf beide Teildreiecke angewandt, um mithilfe zweier Terme für $\cos \frac{\alpha}{2}$ eine Gleichung aufzustellen:

$$\frac{w_\alpha^2 + b^2 - x^2}{2\, b\, w_\alpha} \quad = \quad \frac{w_\alpha^2 + c^2 - y^2}{2\, c\, w_\alpha}$$

Beidseitige Multiplikation mit $2\,b\,c\,w_\alpha$ ergibt:

$$c\,(w_\alpha^2 + b^2 - x^2) \quad = \quad b\,(w_\alpha^2 + c^2 - y^2)$$

Hier werden die Rechenausdrücke für x und y eingesetzt:

$$c\left(w_\alpha^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{(b+c)^2}\right) \quad = \quad b\left(w_\alpha^2 + c^2 - \frac{a^2 c^2}{(b+c)^2}\right)$$

Alle Summanden der ausmultiplizierten Gleichung werden auf eine Seite gebracht und geordnet:

$$\begin{aligned} c\,w_\alpha^2 - b\,w_\alpha^2 + b^2\,c - b\,c^2 - \frac{a^2\,b^2\,c}{(b+c)^2} + \frac{a^2\,b\,c^2}{(b+c)^2} \quad &= \quad 0 \\ (c-b)\,w_\alpha^2 + b\,c\,(b-c) + \frac{a^2\,b\,c}{(b+c)^2} \cdot (c-b) \quad &= \quad 0 \end{aligned}$$

Es stellt sich heraus, dass man durch $(c-b)$ dividieren kann und so eine einfachere Gleichung für die Unbekannte c erhält:

$$\begin{aligned} w_\alpha^2 - b\,c + \frac{a^2\,b\,c}{(b+c)^2} \quad &= \quad 0 \\ (w_\alpha^2 - b\,c)\,(b^2 + 2\,b\,c + c^2) + a^2\,b\,c \quad &= \quad 0 \\ -b\,c^3 + (w_\alpha^2 - 2\,b^2)\,c^2 + (2\,b\,w_\alpha^2 - b^3 + a^2\,b)\,c + b^2\,w_\alpha^2 \quad &= \quad 0 \\ b\,c^3 + (2\,b^2 - w_\alpha^2)\,c^2 + b\,(b^2 - 2\,w_\alpha^2 - a^2)\,c - b^2\,w_\alpha^2 \quad &= \quad 0 \end{aligned}$$

Hier handelt es sich um eine algebraische Gleichung 3. Grades, die sich nicht auf eine Gleichung 2. Grades zurückführen lässt. Zur symbolischen Lösung (Cardanische Formeln) benötigt man neben Quadratwurzeln auch dritte Wurzeln. Daher ist eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal unmöglich. Mithilfe eines geeigneten Näherungsverfahrens, zum Beispiel mit dem Newton-Verfahren oder einer Intervallschachtelung lässt sich die reelle Lösung der Gleichung (also die Seitenlänge c) aber beliebig genau berechnen.

Walter Fendt, 13. März 2023