Bestimmung eines Dreiecks aus Seite, anliegendem Winkel und nicht zugehöriger Winkelhalbierender

Mögliche Kombinationen: (a, β, w_γ), (a, γ, w_β), (b, α, w_γ), (b, γ, w_α), (c, α, w_β), (c, β, w_α)

Gegeben:	c, α, w_β
Gesucht:	β

Konstruktion:

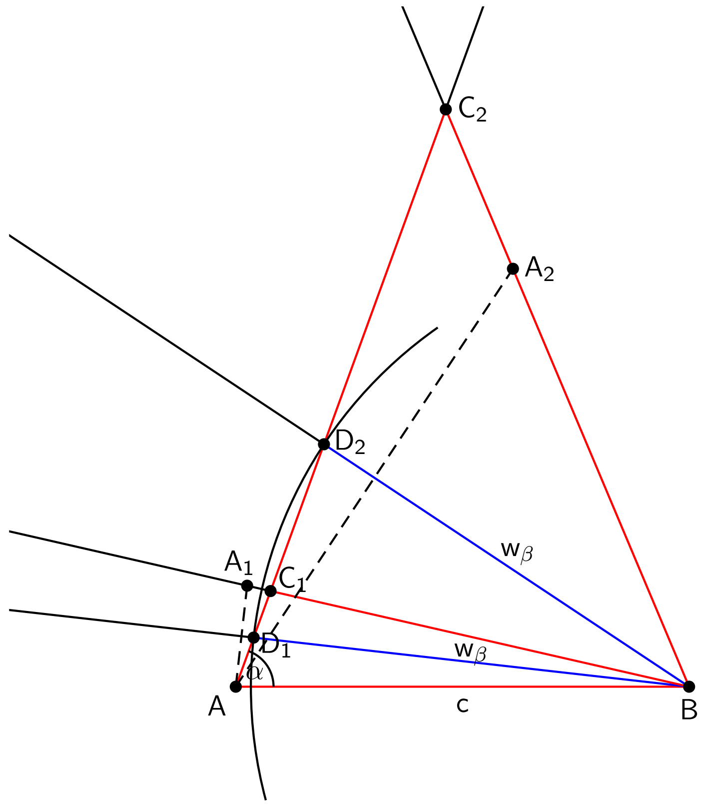
Strecke [AB] mit Länge c
D_1 liegt

1. auf dem freien Schenkel des Winkels α, angetragen an [AB] in A
2. auf dem Kreis um B mit Radius w_β

A_1 ist der Spiegelpunkt von A bezüglich BD_1 (Achsenspiegelung).
C_1 liegt

1. auf der Geraden AD_1
2. auf der Geraden BA_1

2. Lösung entsprechend!



Rechnung:

1. Lösung:

Es sei $\delta_1 = \angle \mathsf{AD_1B}$. Durch Anwendung des Sinussatzes auf das Teildreieck $\mathsf{ABD_1}$ lässt sich δ_1 (mit $\delta_1 > 90°$) bestimmen.

$$\sin\delta_1 = \frac{c\sin\alpha}{w_\beta}$$

Der zugehörige (wegen $\delta_1 > 90°$ negative) Kosinuswert ist

$$\cos\delta_1 = -\frac{\sqrt{w_\beta^2 - c^2\sin^2\alpha}}{w_\beta}.$$

Mithilfe dieser Informationen lässt sich β_1 berechnen:

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\beta_1}{2} &= \sin(180° - \alpha - \delta_1) \\
&= \sin(\alpha + \delta_1) \\
&= \sin\alpha\,\cos\delta_1 + \cos\alpha\,\sin\delta_1 \\
&= -\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{w_\beta^2 - c^2\sin^2\alpha}}{w_\beta} + \cos\alpha\cdot\frac{c\sin\alpha}{w_\beta} \\
&= \frac{\sin\alpha}{w_\beta}\left(c\cos\alpha - \sqrt{w_\beta^2 - c^2\sin^2\alpha}\right) \\
\beta_1 &= 2\,\arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{w_\beta}\left(c\cos\alpha - \sqrt{w_\beta^2 - c^2\sin^2\alpha}\right)\right)
\end{aligned}$$

2. Lösung:

Die zweite Lösung unterscheidet sich von der ersten durch das Vorzeichen des Wurzelausdrucks. Wegen $\delta_2 < 90°$ gilt hier $\cos\delta_2 > 0$. Das Ergebnis für den gesuchten Winkel lautet:

$$\beta_2 = 2\,\arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{w_\beta}\left(c\cos\alpha + \sqrt{w_\beta^2 - c^2\sin^2\alpha}\right)\right)$$

Walter Fendt, 2. April 2023