Bestimmung eines Dreiecks aus einer Seite,

dem Gegenwinkel und der zugehörigen Seitenhalbierenden

Mögliche Kombinationen: (a, α, s_a), (b, β, s_b), (c, γ, s_c)

Gegeben:	c, γ, s_c
Gesucht:	a, b

Konstruktion:

Strecke [AB] mit Länge c
M sei der Mittelpunkt von A und B.
f sei der freie Schenkel des Winkels γ, angetragen an [AB] in A.
Punkt F liegt

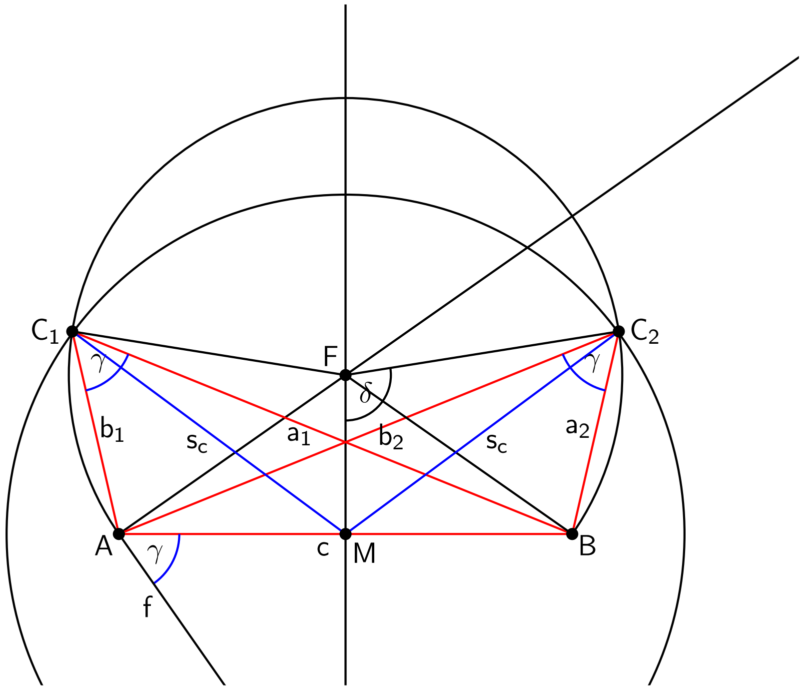
1. auf der Mittelsenkrechten von A und B
2. auf dem Lot zu f in A

C_1 liegt

1. auf dem Kreis um M mit Radius s_c
2. auf dem Kreis um F durch A

2. Lösung entsprechend!

Zeichnung für $\gamma < 90°$; für $\gamma > 90°$ liegt F unterhalb von M.



Begründung der Konstruktion:

Weil der Winkel bei C_1 bzw. C_2 gleich γ sein soll, muss C_1 bzw. C_2 auf dem Fasskreis über $[\mathsf{AB}]$ mit dem Umfangswinkel γ liegen. F ist der Mittelpunkt des Fasskreisbogens (also des Umkreises). Unmittelbar klar ist, dass C_1 bzw. C_2 von M die Entfernung s_c hat und somit auf dem Kreis um M mit Radius s_c liegen muss.

Rechnung:

Als Hilfsgrößen werden $p = \overline{\mathsf{MF}}$ und $r = \overline{\mathsf{FA}} = \overline{\mathsf{FB}} = \overline{\mathsf{FC}_1} = \overline{\mathsf{FC}_2}$ (Umkreisradius) und $\delta = \angle MFC_1$ verwendet.

$$\begin{aligned}
p &= \frac{c\,\tan(90^\circ - \gamma)}{2} \\
&= \frac{c}{2\,\tan\gamma} \\
\sin\gamma &= \frac{c}{2\,r} \\
r &= \frac{c}{2\,\sin\gamma} \\
\cos\delta &= \frac{p^2 + r^2 - s_c^2}{2\,p\,r}
\end{aligned}$$

Die Seitenlängen der ersten Lösung (mit Ecke C_1) erhält man aus dem Kosinussatz unter Berücksichtigung von $\angle C_1FB = \delta + \gamma$ und $\angle BFC_2 = \delta - \gamma$:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sqrt{r^2 + r^2 - 2\,r^2\,\cos(\delta + \gamma)} \\
&= r\,\sqrt{2\,(1 - \cos(\delta + \gamma))} \\
b_1 &= \sqrt{r^2 + r^2 - 2\,r^2\,\cos(\delta - \gamma)} \\
&= r\,\sqrt{2\,(1 - \cos(\delta - \gamma))}
\end{aligned}$$

Die zweite Lösung (mit Ecke C_2) ist symmetrisch zur ersten. Dabei sind die Rollen der Ecken A und B sowie der entsprechenden Seiten und Winkel vertauscht.

$$\begin{aligned}
a_2 &= r\,\sqrt{2\,(1 - \cos(\delta - \gamma))} \\
b_2 &= r\,\sqrt{2\,(1 - \cos(\delta + \gamma))}
\end{aligned}$$

Die angegebenen Formeln gelten auch für $\gamma > 90°$, obwohl der Fasskreis-Mittelpunkt F dann auf der anderen Seite von AB liegt.

Für $\gamma = 90°$ ist die Aufgabenstellung sinnlos, da in diesem Fall $s_c = \frac{c}{2}$ gelten muss (Thaleskreis); ist diese Bedingung erfüllt, gibt es unendlich viele Lösungen; ist sie nicht erfüllt, existiert keine Lösung.

Walter Fendt, 16. März 2023