Bestimmung eines Dreiecks

aus Seite, Gegenwinkel und zugehöriger Höhe

Mögliche Kombinationen: (a, α, h_a), (b, β, h_b), (c, γ, h_c)

Gegeben:	$a,\ \alpha,\ h_a$
Gesucht:	$b,\ c$

Konstruktion:

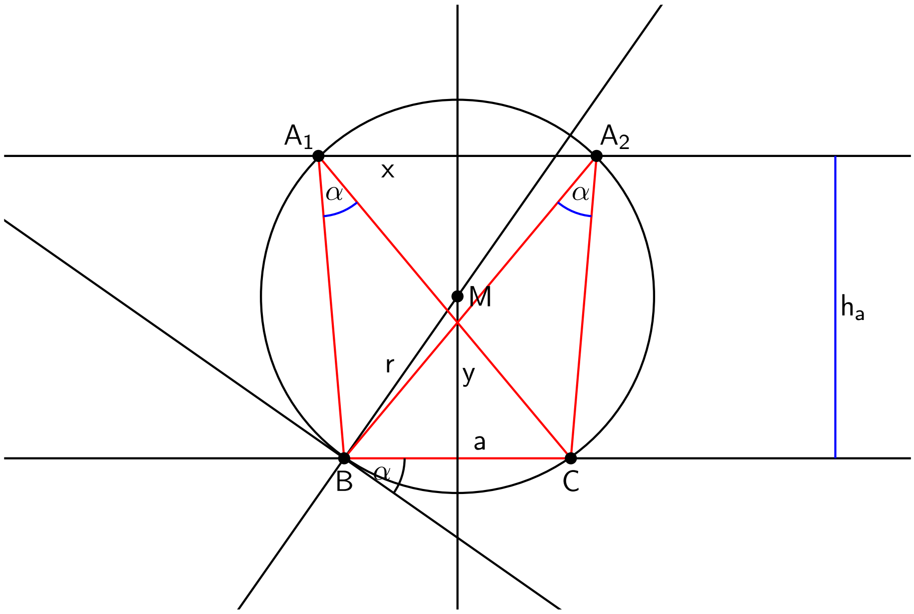
Strecke [BC] mit Länge a
Freier Schenkel (f) des Winkels α, angetragen an [BC] in B
M liegt

1. auf der Mittelsenkrechten von B und C
2. auf dem Lot zu f in B

A_1 (1. Lösung) liegt

1. auf dem Kreis um M durch B
2. auf einer der Parallelen zu BC im Abstand h_a

2. Lösung entsprechend!



Die beiden Lösungsdreiecke sind zueinander symmetrisch. Sie unterscheiden sich durch vertauschte Rollen von b und c.

Begründung der Konstruktion:

Der Umkreis des Dreiecks ABC ist der Fasskreis über $[\mathsf{BC}]$ mit dem Umfangswinkel α. Daraus ergibt sich die Konstruktion des Mittelpunkts M. Die fehlende Ecke (A_1 oder A_2) muss einerseits auf dem Umkreis liegen. Andererseits muss der Abstand von der Geraden BC gleich h_a sein, das heißt A_1 bzw. A_2 muss sich auf einer der Parallelen zu BC im Abstand h_a befinden.

Rechnung:

Radius des Fasskreisbogens:

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

Abstand des Fasskreismittelpunkts M von der Grundlinie BC:

$$y = \frac{a}{2\tan\alpha}$$

Abstand der Ecke A_1 (1. Lösung) von der Mittelsenkrechten zu B und C:

$$x = \sqrt{r^2 - (h_a - y)^2}$$

Seitenlänge b_1 (1. Lösung):

$$b_1 = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + h_a^2}$$

Für die 2. Lösung erhält man entsprechend:

$$b_2 = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + h_a^2}$$

1. Lösung:

$$\begin{aligned} b_1 &= \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + h_a^2} \\ c_1 &= \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + h_a^2} \end{aligned}$$

2. Lösung:

$$
\begin{aligned}
b_2 &= \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + h_a^2} \\
c_2 &= \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + h_a^2}
\end{aligned}
$$

Quelle: Steffen Polster, Mathematik alpha, Lexikon
`mathematikalpha.de/lexikon`

Walter Fendt, 12. März 2023