Bestimmung eines Dreiecks aus Seite,

zugehöriger Seitenhalbierender und nicht zugehöriger Höhe

Mögliche Kombinationen: (a, s_a, h_b), (a, s_a, h_c), (b, s_b, h_a), (b, s_b, h_c), (c, s_c, h_a), (c, s_c, h_b)

Gegeben:	b, s_b, h_c
Gesucht:	a, c

Konstruktion:

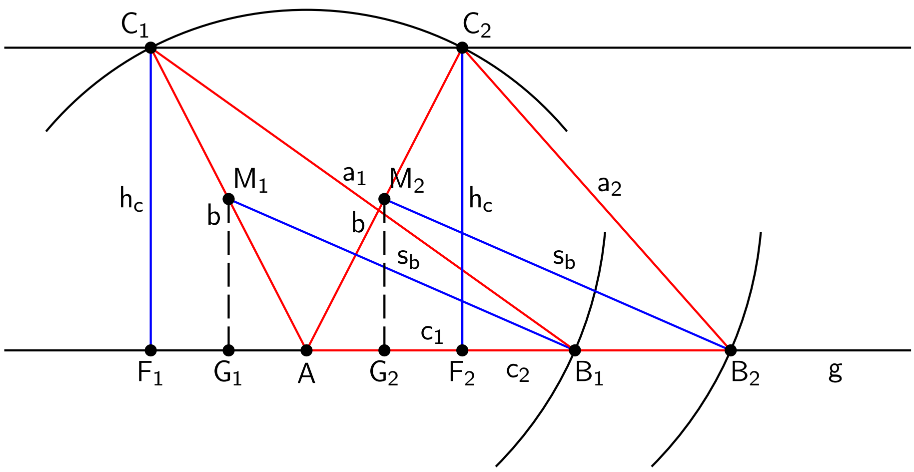
Gerade g beliebig
Punkt A beliebig auf g
$\mathsf{C_1}$ liegt

1. auf einer der Parallelen zu g im Abstand h_c
2. auf dem Kreis um A mit Radius b

$\mathsf{M_1}$ sei der Mittelpunkt von A und $\mathsf{C_1}$.
$\mathsf{B_1}$ liegt

1. auf g
2. auf dem Kreis um $\mathsf{M_1}$ mit Radius s_b

2. Lösung entsprechend!



Begründung der Konstruktion:

$\mathsf{C_1}$ bzw. $\mathsf{C_2}$ muss auf einer Parallele zu $\mathsf{AB_1}$ bzw. $\mathsf{AB_2}$ (also g) im Abstand h_c liegen, damit die Höhe h_c den geforderten Wert hat. Da die Entfernung von A den Wert b haben soll, muss sich $\mathsf{C_1}$ bzw. $\mathsf{C_2}$ auf dem Kreis um A mit Radius b befinden. Aus der Definition der Seitenhalbierenden folgt die Lage von $\mathsf{B_1}$ bzw. $\mathsf{B_2}$ auf dem Kreis um $\mathsf{M_1}$ bzw. $\mathsf{M_2}$ mit Radius s_b.

Rechnung:

Aus

$$\sin\alpha \quad = \quad \frac{h_c}{b}$$

lässt sich der Winkel α bestimmen, wobei es im Allgemeinen zwei Lösungen gibt. Für den später benötigten Kosinuswert folgt:

$$|\cos\alpha| = \sqrt{1 - \frac{h_c^2}{b^2}}$$

1. Lösung (mit $\alpha > 90°$, also $\cos\alpha < 0$):

Lotfußpunkte F_1, G_1 siehe Zeichnung!

$$\begin{aligned}
\overline{\mathsf{AF}_1} &= \sqrt{b^2 - h_c^2} \quad \text{(Pythagoras)} \\
\overline{\mathsf{AG}_1} &= \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2 - h_c^2} \quad \text{(Strahlensatz)} \\
\overline{\mathsf{G}_1\mathsf{B}_1} &= \sqrt{s_b^2 - \tfrac{1}{4}\,h_c^2} \quad \text{(Pythagoras)} \\
c_1 &= \overline{\mathsf{AB}_1} = \overline{\mathsf{G}_1\mathsf{B}_1} - \overline{\mathsf{G}_1\mathsf{A}} \\
&= \sqrt{s_b^2 - \tfrac{1}{4}\,h_c^2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2 - h_c^2}
\end{aligned}$$

Die Seitenlänge a_1 lässt sich mit dem Kosinussatz berechnen:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sqrt{b^2 + c_1^2 - 2\,b\,c_1\,\cos\alpha_1} \\
&= \sqrt{b^2 + c_1^2 + 2\,b\,c_1\sqrt{1 - \frac{h_c^2}{b^2}}}
\end{aligned}$$

2. Lösung (mit $\alpha < 90°$, also $\cos\alpha > 0$):

Lotfußpunkte F_2, G_2 siehe Zeichnung!

$$\begin{aligned}
\overline{\mathsf{AF}_2} &= \sqrt{b^2 - h_c^2} \quad \text{(Pythagoras)} \\
\overline{\mathsf{AG}_2} &= \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2 - h_c^2} \quad \text{(Strahlensatz)} \\
\overline{\mathsf{G}_2\mathsf{B}_2} &= \sqrt{s_b^2 - \tfrac{1}{4}\,h_c^2} \quad \text{(Pythagoras)} \\
c_2 &= \overline{\mathsf{AG}_2} + \overline{\mathsf{G}_2\mathsf{B}_2} \\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2 - h_c^2} + \sqrt{s_b^2 - \tfrac{1}{4}\,h_c^2}
\end{aligned}$$

Weiter mit dem Kosinussatz:

$$\begin{aligned}
a_2 &= \sqrt{b^2 + c_2^2 - 2\,b\,c_2\,\cos\alpha_2} \\
&= \sqrt{b^2 + c_2^2 - 2\,b\,c_2\sqrt{1 - \frac{h_c^2}{b^2}}}
\end{aligned}$$

Quelle: Steffen Polster, Mathematik alpha, Lexikon (Lösung abgeändert)
`mathematikalpha.de/lexikon`

Walter Fendt, 24. März 2023