Bestimmung eines Dreiecks

aus Seite, Gegenwinkel und zugehöriger Winkelhalbierender

Mögliche Kombinationen: (a, α, w_α), (b, β, w_β), (c, γ, w_γ)

Gegeben:	a, α, w_α
Gesucht:	b, c

Konstruktion:

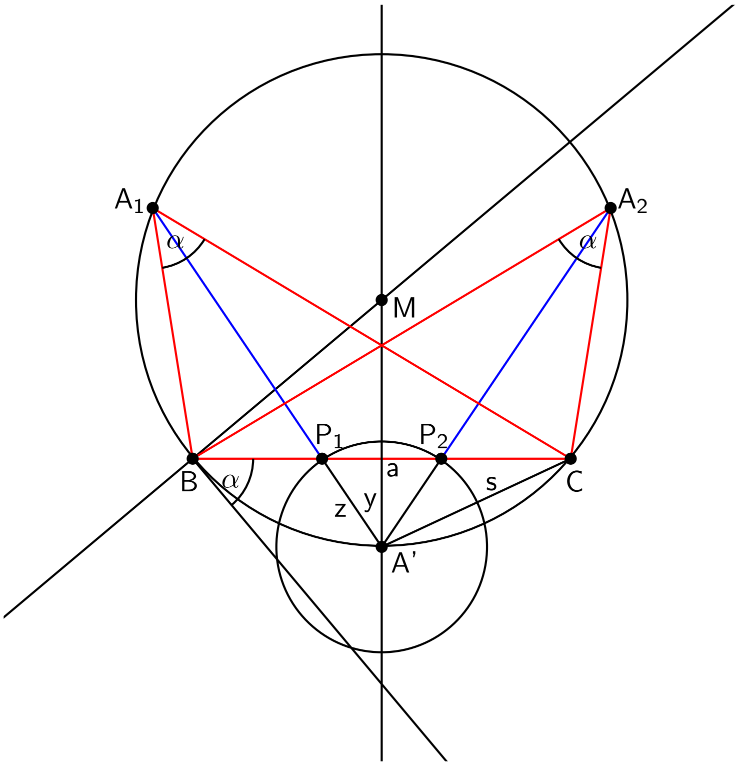
Strecke [BC] mit Länge a
Freier Schenkel (f) des Winkels α, angetragen an [BC] in B
M liegt
1. auf der Mittelsenkrechten zu B und C
2. auf dem Lot zum freien Schenkel f im Punkt B

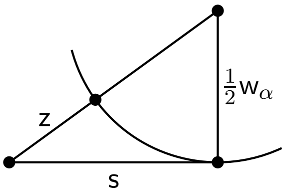
A′ (Südpolsatz!) liegt
1. auf der Mittelsenkrechten zu B und C
2. auf dem Kreis um M durch B (Umkreis!)

Hilfskonstruktion: Rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen $s = \overline{A'C}$ und $\frac{1}{2}w_\alpha$,
Bestimmung von z mithilfe eines Kreises
P_1 (1. Lösung) liegt
1. auf der Geraden BC
2. auf dem Kreis um A′ mit Radius z

A_1 (1. Lösung) liegt
1. auf dem Kreis um M durch B (Umkreis!)
2. auf der Geraden $A'P_1$

2. Lösung entsprechend!





Hilfskonstruktion

Die beiden Lösungsdreiecke $\mathsf{A_1BC}$ und $\mathsf{A_2BC}$ sind zueinander symmetrisch. Dabei sind die Rollen der Seitenlängen b und c vertauscht.

Begründung der Konstruktion:

Der Umkreis des Dreiecks ABC ist der Fasskreis über $[\mathsf{BC}]$ mit dem Umfangswinkel α. Dementsprechend wird der Mittelpunkt M konstruiert.

Für die erste Lösung sei $\mathsf{P_1}$ der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit der Seite $[\mathsf{BC}]$. Nach dem Südpolsatz schneiden sich die (verlängerte) Winkelhalbierende und die zugehörige Mittelsenkrechte in einem Punkt $\mathsf{A'}$, der auf dem Umkreis liegt. Im Folgenden werden die Bezeichnungen $s = \overline{\mathsf{A'C}}$ und $z = \overline{\mathsf{A'P_1}}$ verwendet.

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $\mathsf{A_1A'C}$ und $\mathsf{CA'P_1}$ (Übereinstimmung in zwei Winkeln) folgt:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathsf{A_1A'}} : \overline{\mathsf{A'C}} &= \overline{\mathsf{CA'}} : \overline{\mathsf{A'P_1}} \\
(w_\alpha + z) : s &= s : z \\
z^2 + w_\alpha z &= s^2 \\
(z + \frac{1}{2}w_\alpha)^2 &= s^2 + \frac{1}{4}w_\alpha^2 \\
z + \frac{1}{2}w_\alpha &= \sqrt{s^2 + \frac{1}{4}w_\alpha^2}
\end{aligned}$$

$$z = \sqrt{s^2 + \frac{1}{4}w_\alpha^2} - \frac{1}{2}w_\alpha$$

Die letzte Gleichung entspricht der Hilfskonstruktion (rechts).

Rechnung:

Nach dem Umfangswinkelsatz gilt $\angle \mathsf{BCA'} = \frac{\alpha}{2}$. Daraus ergibt sich die Streckenlänge s:

$$s = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Streckenlänge z (Hilfskonstruktion):

$$z = \sqrt{s^2 + \tfrac{1}{4}w_\alpha^2} - \tfrac{1}{2}w_\alpha$$

Abstand des Südpols $\mathsf{A'}$ von der Geraden BC:

$$y = \frac{a}{2}\tan\frac{\alpha}{2}$$

Sinussatz im Dreieck $\mathsf{A_1BP_1}$ (1. Lösung):

$$\begin{aligned}
\sin\beta_1 : \sin\frac{\alpha}{2} &= w_\alpha : \left(\frac{a}{2} - \sqrt{z^2 - y^2}\right) \\
\sin\beta_1 &= \frac{w_\alpha \, \sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{a}{2} - \sqrt{z^2 - y^2}}
\end{aligned}$$

Sinussatz im Dreieck $\mathsf{A_1BC}$ (1. Lösung):

$$\begin{aligned}
\sin\beta_1 : \sin\alpha &= b_1 : a \\
b_1 &= \frac{a\sin\beta_1}{\sin\alpha} \\
&= \frac{a\,w_\alpha\,\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha\left(\frac{a}{2} - \sqrt{z^2 - y^2}\right)} \\
&= \frac{a\,w_\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}\,\left(\frac{a}{2} - \sqrt{z^2 - y^2}\right)} \\
&= \frac{a\,w_\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\,\left(a - 2\sqrt{z^2 - y^2}\right)}
\end{aligned}$$

2. Lösung mit Pluszeichen statt Minuszeichen im Nenner:

$$b_2 = \frac{a\,w_\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\,\left(a + 2\sqrt{z^2 - y^2}\right)}$$

1. Lösung:

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{a\,w_\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\,\left(a - 2\sqrt{z^2 - y^2}\right)} \\
c_1 &= \frac{a\,w_\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\,\left(a + 2\sqrt{z^2 - y^2}\right)}
\end{aligned}$$

2. Lösung:

$$\begin{aligned}
b_2 &= \frac{a\,w_\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\,\left(a + 2\sqrt{z^2 - y^2}\right)} \\
c_2 &= \frac{a\,w_\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\,\left(a - 2\sqrt{z^2 - y^2}\right)}
\end{aligned}$$

Quelle: Steffen Polster, Mathematik alpha, Lexikon
`mathematikalpha.de/lexikon`

Walter Fendt, 12. März 2023