Bestimmung eines Dreiecks aus einer Seite und beiden nicht zugehörigen Seitenhalbierenden

Mögliche Kombinationen: (a, s_b, s_c), (b, s_a, s_c), (c, s_a, s_b)

Gegeben:	$a,\ s_b,\ s_c$
Gesucht:	$b,\ c$
Voraussetzung:	$2s_b^2 + 4s_c^2 > 3a^2;\ 4s_b^2 + 2s_c^2 > 3a^2$

Konstruktion:

Strecke [BC] mit Länge a

S liegt

1. auf dem Kreis um B mit Radius $\frac{2}{3}\,s_b$
2. auf dem Kreis um C mit Radius $\frac{2}{3}\,s_c$

D liegt

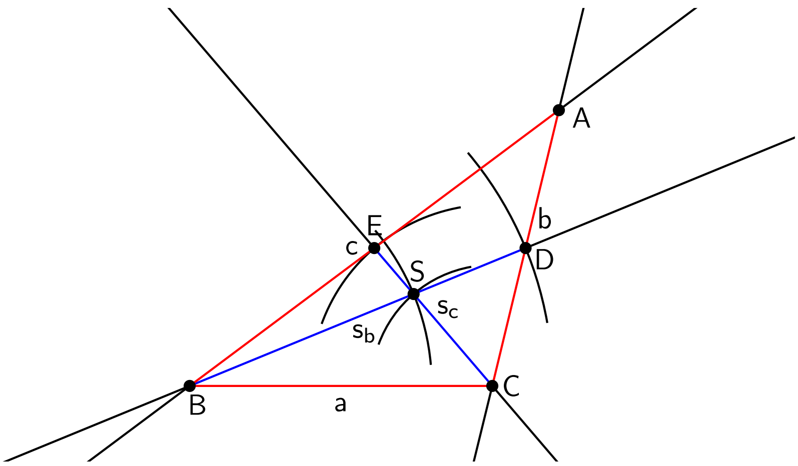
1. auf der Geraden BS
2. auf dem Kreis um B mit Radius s_b

E liegt

1. auf der Geraden CS
2. auf dem Kreis um C mit Radius s_c

A liegt

1. auf der Geraden BE
2. auf der Geraden CD



Begründung der Konstruktion:

Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in dessen Schwerpunkt S, und zwar im Verhältnis 2 : 1 (längerer Abschnitt jeweils zwischen Ecke und Schwerpunkt). Daher gilt $\overline{BS} = \frac{2}{3}\,s_b$ und $\overline{CS} = \frac{2}{3}\,s_c$.

Rechnung:

Die Längen der Seitenhalbierenden (s_b und s_c) lassen sich folgendermaßen durch die Seitenlängen ausdrücken:

$$\begin{aligned} s_b &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} \\ s_c &= \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} \\ 4\,s_b^2 &= 2a^2 + 2c^2 - b^2 \\ 4\,s_c^2 &= 2a^2 + 2b^2 - c^2 \end{aligned}$$

Um c zu eliminieren, wird nun zur vorletzten Gleichung das Doppelte der letzten Gleichung addiert.

$$\begin{aligned} 4\,s_b^2 + 8\,s_c^2 &= 6a^2 + 3b^2 \\ 3b^2 &= 4\,s_b^2 + 8\,s_c^2 - 6a^2 \\ b &= \frac{1}{3}\sqrt{12\,s_b^2 + 24\,s_c^2 - 18a^2} \end{aligned}$$

Das Ergebnis für c lautet entsprechend:

$$c = \frac{1}{3}\sqrt{12\,s_c^2 + 24\,s_b^2 - 18a^2}$$

Walter Fendt, 21. März 2023