Bestimmung eines Dreiecks aus zwei Seiten

und der Winkelhalbierenden des Zwischenwinkels

3 Kombinationen: (a, b, w_γ), (a, c, w_β), (b, c, w_α)

Gegeben:	a, b, w_γ
Gesucht:	γ, c

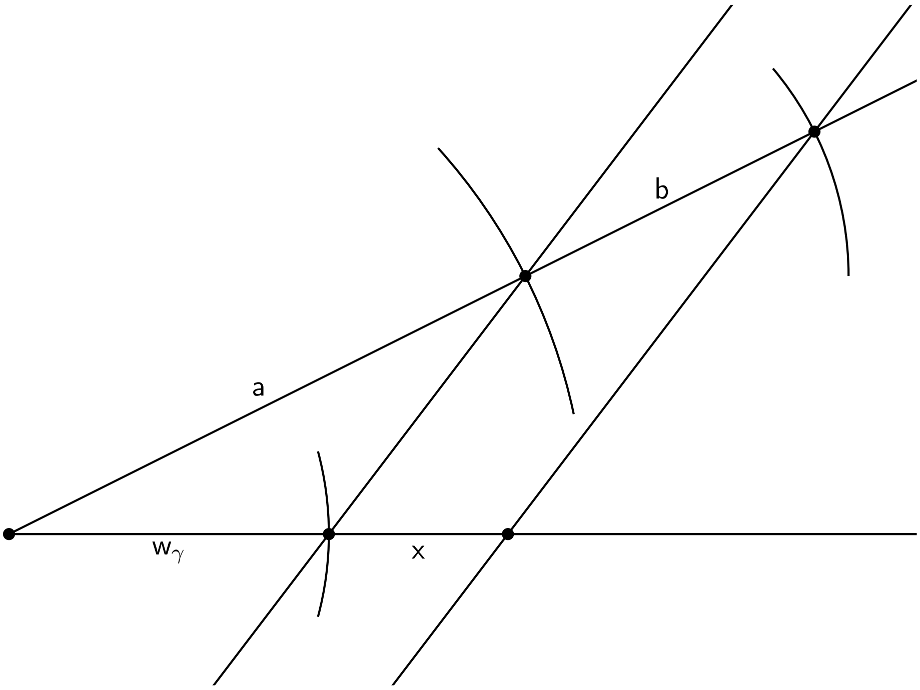
Konstruktion:

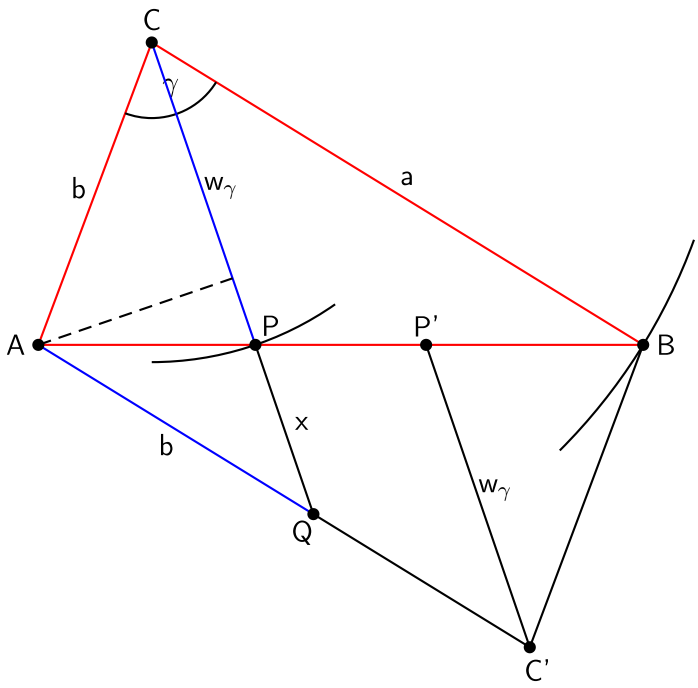
Hilfskonstruktion für $x = \dfrac{b\,w_\gamma}{a}$ (Strahlensatz)
Dreieck CAQ mit $\overline{\mathsf{CA}} = \overline{\mathsf{AQ}} = b$ und $\overline{\mathsf{QC}} = w_\gamma + x$
P liegt

1. auf der Geraden CQ
2. auf dem Kreis um C mit Radius w_γ

B liegt

1. auf der Geraden AP
2. auf dem Kreis um C mit Radius a





Begründung der Konstruktion:

Der Punkt C' ist so gewählt, dass $\mathsf{AC'BC}$ ein Parallelogramm ist. P ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit AB, Q der Schnittpunkt der verlängerten Winkelhalbierenden mit AC'. Der Verlängerungsbetrag ist $x = \overline{\mathsf{PQ}}$. Ist P' der Spiegelpunkt von P bezüglich des Parallelogramm-Mittelpunkts (Punktspiegelung), so ist die Strecke $[\mathsf{C'P'}]$ parallel zur Winkelhalbierenden und es gilt $\overline{\mathsf{C'P'}} = w_\gamma$.

Das Dreieck CAQ ist wegen $\angle\,\mathsf{CQA} = \frac{\gamma}{2}$ (Punktsymmetrie, Stufenwinkel an Parallelen) gleichschenklig mit Basis $[\mathsf{QC}]$. Aufgrund des Strahlensatzes (mit Kreuzungspunkt P) muss $a : b = w_\gamma : x$, also $x = \dfrac{b\,w_\gamma}{a}$ gelten.

Rechnung:

$$\begin{aligned} w_\gamma + x &= w_\gamma + \frac{b\,w_\gamma}{a} \\ &= \frac{(a+b)\,w_\gamma}{a} \end{aligned}$$

Der Winkel γ lässt sich berechnen, indem man das gleichschenklige Dreieck CAQ in zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegt. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \cos\frac{\gamma}{2} &= \frac{\frac{1}{2}\,(w_\gamma + x)}{b} \\ &= \frac{(a+b)\,w_\gamma}{2\,a\,b} \end{aligned}$$

Die fehlende Seitenlänge c erhält man aus dem Kosinussatz:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma}$$

Quelle: Steffen Polster, Mathematik alpha, Lexikon
`mathematikalpha.de/lexikon`

Walter Fendt, 15. März 2023