Bestimmung eines Dreiecks aus Seite, zugehöriger Seitenhalbierender und zugehöriger Höhe

Mögliche Kombinationen: (a, s_a, h_a), (b, s_b, h_b), (c, s_c, h_c)

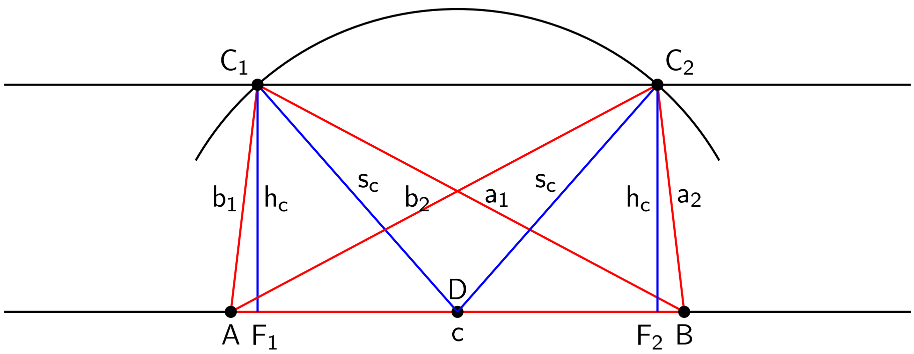
Gegeben:	c, s_c, h_c
Gesucht:	a, b
Voraussetzung:	$s_c \geq h_c$

Konstruktion:

Strecke [AB] mit Länge c
D sei der Mittelpunkt von A und B.
C_1 liegt

1. auf einer der Parallelen zu AB im Abstand h_c
2. auf dem Kreis um D mit Radius s_c

2. Lösung entsprechend!



Begründung der Konstruktion:

Der Punkt C_1 bzw. C_2 muss von der Geraden AB den Abstand h_c haben, also auf einer der Parallelen zu AB im Abstand h_c liegen. Andererseits muss C_1 bzw. C_2 vom Seitenmittelpunkt D die Entfernung s_c haben, sich also auf dem Kreis um D mit Radius s_c befinden.

Rechnung:

Bezeichnet man die Höhenfußpunkte der beiden Lösungen mit $\mathsf{F_1}$ und $\mathsf{F_2}$, so ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras:

$$\overline{\mathsf{DF_1}} = \overline{\mathsf{DF_2}} = \sqrt{s_c^2 - h_c^2}$$

Für die Seitenlängen des ersten Lösungsdreiecks erhält man daraus durch erneute Anwendung des Satzes von Pythagoras:

$$\begin{aligned}
a_1^2 &= \left(\overline{\mathsf{DB}} + \overline{\mathsf{F_1D}}\right)^2 + \overline{\mathsf{F_1C_1}}^2 \\
&= \left(\frac{c}{2} + \sqrt{s_c^2 - h_c^2}\right)^2 + h_c^2 \\
&= \frac{c^2}{4} + c\sqrt{s_c^2 - h_c^2} + (s_c^2 - h_c^2) + h_c^2 \\
&= \frac{c^2}{4} + c\sqrt{s_c^2 - h_c^2} + s_c^2 \\
b_1^2 &= \left(\overline{\mathsf{AD}} - \overline{\mathsf{F_1D}}\right)^2 + \overline{\mathsf{F_1C_1}}^2 \\
&= \left(\frac{c}{2} - \sqrt{s_c^2 - h_c^2}\right)^2 + h_c^2 \\
&= \frac{c^2}{4} - c\sqrt{s_c^2 - h_c^2} + (s_c^2 - h_c^2) + h_c^2 \\
&= \frac{c^2}{4} - c\sqrt{s_c^2 - h_c^2} + s_c^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + 4\,s_c^2 + 4\,c\sqrt{s_c^2 - h_c^2}} \\
b_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + 4\,s_c^2 - 4\,c\sqrt{s_c^2 - h_c^2}}
\end{aligned}$$

Das zweite Lösungsdreieck ist zum ersten symmetrisch, wobei die Ecken A und B sowie die zugehörigen Seiten und Transversalen ihre Rollen vertauschen.

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + 4\,s_c^2 - 4\,c\,\sqrt{s_c^2 - h_c^2}} \\ b_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + 4\,s_c^2 + 4\,c\,\sqrt{s_c^2 - h_c^2}} \end{aligned}$$

Falls s_c mit h_c übereinstimmt, gibt es nur eine Lösung.

Walter Fendt, 23. März 2023