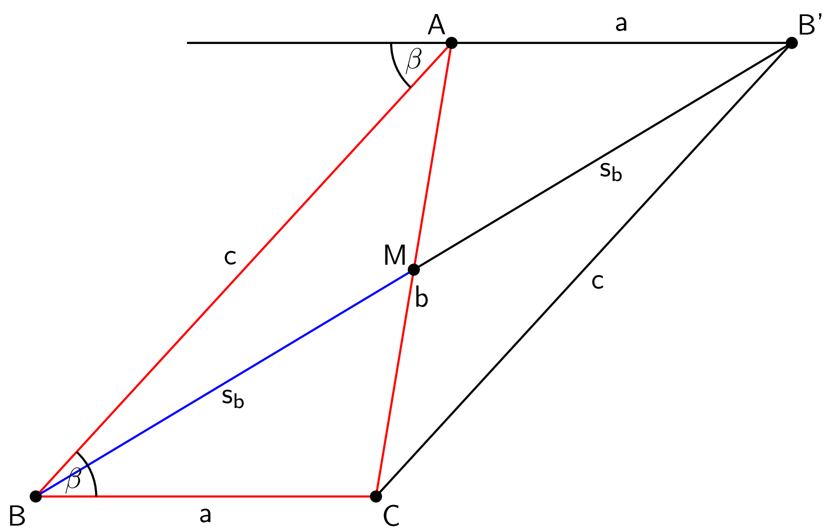
Bestimmung eines Dreiecks aus Seite, anliegendem Winkel und zugehöriger Seitenhalbierender

Mögliche Kombinationen: (a, β, s_b), (a, γ, s_c), (b, α, s_a), (b, γ, s_c), (c, α, s_a), (c, β, s_b)

Gegeben:	$a,\ \beta,\ s_b$
Gesucht:	c

Konstruktion:

Dreieck $\mathsf{BB'A}$ mit $\overline{\mathsf{BB'}} = 2\,s_b$, $\overline{\mathsf{B'A}} = a$ und $\angle\,\mathsf{BAB'} = 180° - \beta$
M ist der Mittelpunkt von $[\mathsf{BB'}]$.
C ist der Spiegelpunkt von A bezüglich M (Punktspiegelung).



Begründung der Konstruktion:

Der Punkt $\mathsf{B'}$ ist so gewählt, dass $\mathsf{BCB'A}$ ein Parallelogramm ist. Da sich in einem Parallelogramm die Diagonalen gegenseitig halbieren, ist der Parallelogramm-Mittelpunkt M der Mittelpunkt der Dreiecksseite $[\mathsf{CA}]$, also Endpunkt der Seitenhalbierenden, und die Diagonale $[\mathsf{BB'}]$ hat die Länge $2\,s_b$. Des Weiteren ist zu beachten, dass in einem Parallelogramm gegenüberliegende Seiten gleich lang sind und benachbarte Innenwinkel sich zu $180°$ ergänzen.

Rechnung:

Aus dem Kosinussatz, angewandt auf das Dreieck $\mathsf{BB'A}$, folgt:

$$\begin{aligned} (2\,s_b)^2 &= a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,\cos(180^\circ - \beta) \\ 4\,s_b^2 &= a^2 + c^2 + 2\,a\,c\cos\beta \end{aligned}$$

Damit hat man eine quadratische Gleichung zur Berechnung der Seitenlänge c:

$$c^2 + 2\,a\,\cos\beta \cdot c + (a^2 - 4\,s_b^2) = 0$$

Die Lösungen (soweit vorhanden) sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} c &= \frac{-2\,a\,\cos\beta \pm \sqrt{(2\,a\,\cos\beta)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 - 4\,s_b^2)}}{2 \cdot 1} \\ &= -a\,\cos\beta \pm \sqrt{a^2\cos^2\beta - a^2 + 4s_b^2} \\ &= -a\,\cos\beta \pm \sqrt{4s_b^2 - a^2\sin^2\beta} \end{aligned}$$

Da c für die Länge einer Dreiecksseite steht, sind nur positive Lösungen brauchbar.

Walter Fendt, 19. März 2023