Die gleichförmig beschleunigte Bewegung

Walter Fendt

11. April 2003

Gesucht sind Gleichungen, die eine geradlinige Bewegung eines punktförmigen Körpers mit konstanter Beschleunigung a beschreiben. Die Bewegung beginnt zur Zeit $t = 0$ mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0.

In den Berechnungen werden folgende Größen verwendet:

t	Zeit
Δt	Länge des Zeitintervalls
s	zurückgelegte Strecke
v_0	Anfangsgeschwindigkeit
v	Momentangeschwindigkeit
$\bar{v}$	mittlere Geschwindigkeit
Δv	Geschwindigkeitsänderung
a	Momentanbeschleunigung (konstant)
$\bar{a}$	mittlere Beschleunigung

Da die Beschleunigung konstant ist, gibt es keinen Unterschied zwischen der Momentanbeschleunigung a und der mittleren Beschleunigung $\bar{a}$, die als Quotient der Geschwindigkeitsänderung ($\Delta v = v - v_0$) und der Länge des betrachteten Zeitintervalls ($\Delta t = t - 0 = t$) definiert ist.

$$\begin{aligned}
\bar{a} &= \frac{\Delta v}{\Delta t} \\
\Delta v &= \bar{a}\,\Delta t \\
v - v_0 &= at \\
v &= at + v_0
\end{aligned}$$

Momentangeschwindigkeit:

$$v = at + v_0 \tag{1}$$

Etwas komplizierter ist die Ermittlung der seit Beginn der Bewegung zurückgelegten Strecke s. Da die Geschwindigkeit nicht gleich bleibt, entfällt zunächst die Möglichkeit, einfach die Geschwindigkeit mit der Zeit zu multiplizieren. Weil sich aber die Geschwindigkeit im Verlauf der Zeit gleichmäßig ändert (konstante Beschleunigung!), kann man die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ während des betrachteten Zeitintervalls einfach errechnen, nämlich als arithmetisches Mittel (Durchschnittswert) der Anfangsgeschwindigkeit v_0 und der momentanen Geschwindigkeit v. Wenn man diese mittlere Geschwindigkeit mit der Zeit multipliziert, erhält man die gesuchte Strecke.

$$\begin{aligned}
\bar{v} &= \frac{v_0 + v}{2} \\
s &= \bar{v}\,\Delta t \\
&= \frac{v_0 + v}{2}\,t
\end{aligned}$$

Hier kann man das Ergebnis (1) einsetzen:

$$\begin{aligned}
s &= \frac{v_0 + (at + v_0)}{2}\,t \\
&= \frac{at + 2v_0}{2}\,t \\
&= \frac{at^2 + 2v_0 t}{2} \\
&= \frac{a}{2}t^2 + v_0 t
\end{aligned}$$

Zurückgelegte Strecke:

$$s = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t \tag{2}$$

Die Differenzialrechnung ermöglicht es, die bisherigen Ergebnisse zu überprüfen. Dazu fasst man die Strecke s als Funktion der Zeit auf:

$$s = f(t) = \frac{a}{2}\,t^2 + v_0 t$$

Einsetzen von $t = 0$ (Beginn der Bewegung) ergibt, dass zu diesem Zeitpunkt die zurückgelegte Strecke tatsächlich gleich 0 ist.

Die Momentangeschwindigkeit v entspricht der (ersten) Ableitung der Funktion f. Es gilt also

$$\begin{aligned} v &= \dot{f}(t) \\ &= \frac{a}{2} \cdot 2t + v_0 \cdot 1 \\ &= at + v_0, \end{aligned}$$

was mit (1) übereinstimmt. Setzt man hier t gleich 0 (Beginn der Bewegung), so ergibt sich richtigerweise die Anfangsgeschwindigkeit v_0.

Die Momentanbeschleunigung ist als zweite Ableitung der Strecke, das heißt als erste Ableitung der Momentangeschwindigkeit nach der Zeit, definiert. Aus

$$\dot{f}(t) = at + v_0$$

ergibt sich für die zweite Ableitung also

$$\ddot{f}(t) = a \cdot 1 + 0 = a.$$

a ist somit tatsächlich die (konstante) Beschleunigung der Bewegung.

Eine weitere, für Berechnungen häufig nützliche Formel folgt durch einfache Umformungen aus den Gleichungen (1) und (2).

$$\begin{aligned} v^2 - v_0^2 &= (at + v_0)^2 - v_0^2 \\ &= a^2t^2 + 2atv_0 + v_0^2 - v_0^2 \\ &= a^2t^2 + 2atv_0 \\ &= a(at^2 + 2v_0 t) \\ &= 2a\left(\frac{a}{2}\,t^2 + v_0 t\right) \\ &= 2as \end{aligned}$$

Zusammenhang zwischen Momentangeschwindigkeit und zurückgelegter Strecke:

$$v^2 - v_0^2 = 2as \quad (3)$$

© Walter Fendt, http://www.walter-fendt.de/phys/mech/beschlbw.pdf
Letzte Änderung am 13. April 2003