# Überlegungen zur Loopingbahn

**Walter Fendt**

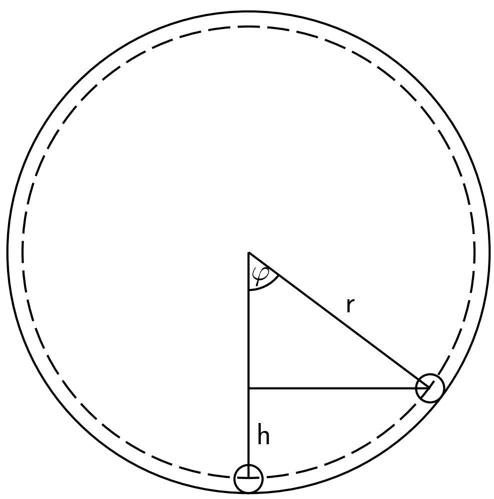
31. März 2020

## Voraussetzungen und Vereinfachungen

Es wird angenommen, dass eine Kugel der Masse $m$ auf einer Kreisbahn mit Radius $r$ rollt. Reibung und Eigenrotation werden vernachlässigt. Die Ausgangshöhe $H$, in der die Kugel losgelassen wird, bezieht sich auf den tiefsten Punkt der Kreisbahn. Ist die Ausgangshöhe größer als der Radius, so lässt man die Kugel zunächst auf einer Rinne herunterrollen, bis sie die Kreisbahn erreicht. Die Fallbeschleunigung wird wie üblich mit $g$ bezeichnet.

## Berechnung der Position zu einem gegebenen Zeitpunkt

Um die momentane Position der rollenden Kugel anzugeben, verwendet man sinnvollerweise den Positionswinkel $\varphi$ (siehe Skizze). Es wird angenommen, dass sich die Kugel zur Zeit $t = 0$ am tiefsten Punkt befindet ($\varphi = 0$). Im Folgenden wird $\varphi$ immer im Bogenmaß angegeben.



### Energieerhaltung

Beim Loslassen hat die Kugel die potentielle Energie $mgH$. Zu einem späteren Zeitpunkt wird die Kugel im Allgemeinen sowohl kinetische als auch potentielle Energie besitzen. Aus dem Energieerhaltungssatz folgert man

$$mgH = \frac{m}{2}v^2 + mgh, \tag{1}$$

wobei $v$ für die Momentangeschwindigkeit steht und $h$ für die momentane Höhe über dem tiefsten Punkt.

### Geschwindigkeit

Die letzte Gleichung (1) kann man durch $m$ dividieren und nach $v^2$ auflösen:

$$v^2 = 2gH - 2gh = 2g(H - h) \tag{2}$$

Aus dem Ansatz $\cos\varphi = \frac{r-h}{r}$ (Ankathete durch Hypotenuse) ergibt sich $h = r - r\cos\varphi$, was man in (2) einsetzen kann:

$$v^2 = 2g(H - r + r\cos\varphi) \tag{3}$$
$$v = \sqrt{2g(H - r + r\cos\varphi)} \tag{4}$$

### Zeit in Abhängigkeit vom Positionswinkel

Aus dem Zusammenhang $v = r\omega$ zwischen Geschwindigkeit $v$ und Winkelgeschwindigkeit $\omega$ bei einer Kreisbewegung erhält man einen Ansatz für $\dot{\varphi}$, also für die zeitliche Ableitung des Positionswinkels $\varphi$.

$$\dot{\varphi} = \frac{v}{r} \tag{5}$$

Unter Verwendung von (4) lässt sich das in der Form

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{2g(H - r + r\cos\varphi)}}{r} \tag{6}$$

schreiben. Fasst man nun $t$ als Funktion von $\varphi$ auf (Umkehrfunktion!), so ergibt sich aus der Regel für die Ableitung einer Umkehrfunktion der Kehrwert des letzten Rechenausdrucks.

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{r}{\sqrt{2g(H - r + r\cos\varphi)}} \tag{7}$$

Wenn man die Ableitung einer Funktion nach einer Variablen kennt, muss man integrieren, um den Wert der entsprechenden Größe zu erhalten (siehe Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Die Zeit, welche die Kugel vom tiefsten Punkt bis zur Position mit dem Positionswinkel $\varphi$ benötigt, ist demnach gegeben durch

$$t = \int_0^{\varphi} \frac{r}{\sqrt{2g(H - r + r\cos f)}}\,\mathrm{d}f. \tag{8}$$

Bemerkung: Als Integrationsvariable wird hier $f$ verwendet, damit die Bezeichnung nicht mit der oberen Integrationsgrenze $\varphi$ in Konflikt kommt.

Für dieses Integral gibt es zwar keinen geschlossenen Rechenausdruck, aber man kann es mit geeigneten Näherungsverfahren (zum Beispiel mit dem Romberg-Verfahren) beliebig genau berechnen.

### Positionswinkel in Abhängigkeit von der Zeit

Ist die Zeit $t$ gegeben, so lässt sich der zugehörige Positionswinkel $\varphi$ folgendermaßen ermitteln: Mit dem Romberg-Verfahren (oder einem ähnlichen Verfahren) stellt man eine Tabelle mit zusammengehörigen Wertepaaren $(t, \varphi)$ zusammen. Anschließend kann man durch lineare Interpolation auch für nicht vorkommende Werte von $t$ die zugehörigen Positionswinkel bestimmen.

## Kräfte

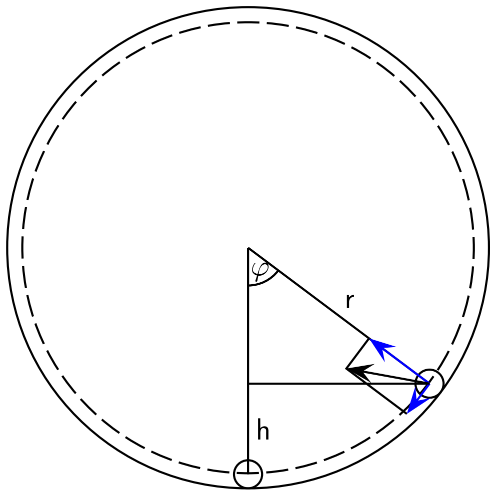
Die auf die Kugel ausgeübte Gesamtkraft lässt sich einerseits zerlegen in Tangentialkraft (in Bewegungsrichtung) und Radialkraft (senkrecht dazu), andererseits in Gewichtskraft (nach unten) und Kontaktkraft (senkrecht zur Unterlage).

Vektorielle Formulierung:

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_t} + \overrightarrow{F_r} = \overrightarrow{F_G} + \overrightarrow{F_K} \tag{9}$$

Bemerkung: Die Bezeichnung „Radialkraft“ bedeutet das Gleiche wie „Zentripetalkraft“.

**Tangential- und Radialkraft**

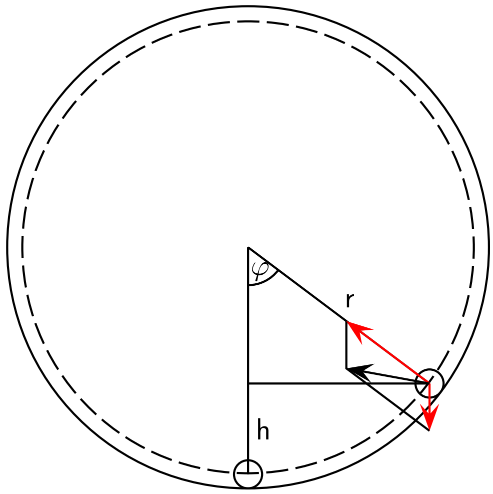



$$F_t = mg \sin\varphi \tag{10}$$

$$F_r = \frac{mv^2}{r} = \frac{2mg}{r}\left(H - r + r\cos\varphi\right) \tag{11}$$

Bemerkung: $F_t$ ist die tangentiale Komponente der Gewichtskraft (anders ausgedrückt die Hangabtriebskraft). Die radiale Komponente $F_r$ ergibt sich aus der Formel $F_r = \frac{mv^2}{r}$ für den Betrag der Zentripetalkraft und aus Gleichung (3).

### Gewichtskraft und Kontaktkraft




$$
\begin{aligned}
F_G &= mg && (12)\\
F_K &= \frac{mv^2}{r} + mg\cos\varphi && (13)\\
&= \frac{2mg}{r}(H - r + r\cos\varphi) + mg\cos\varphi && (14)\\
&= \frac{2mg}{r}(H - r) + 3mg\cos\varphi && (15)
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Die Kontaktkraft (der Unterlage) ist – wie die Radialkraft – zum Mittelpunkt der Kreisbahn gerichtet. Die Formeln für die Beträge von Radialkraft und Kontaktkraft unterscheiden sich durch den Summanden $mg\cos\varphi$, also durch die radiale Komponente der Gewichtskraft. Für $\varphi < \frac{1}{2}\pi$ hat die Kontaktkraft einen größeren, für $\varphi > \frac{1}{2}\pi$ einen kleineren Betrag als die Radialkraft.

## Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung für den Positionswinkel $\varphi$ lässt sich mithilfe des 2. Newton'schen Gesetzes (Kraftgesetz) aufstellen. Der Betrag $F_t$ der beschleunigenden Kraft (siehe (10)) ist gleich dem Produkt aus der Masse $m$ und der Beschleunigung $a = r\ddot{\varphi}$. ($\ddot{\varphi}$ steht dabei für die zweite Ableitung von $\varphi$ nach der Zeit $t$.)

Die Differentialgleichung lautet daher

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{r}\sin\varphi = 0. \qquad (16)$$

Dieselbe Differentialgleichung gilt auch für ein Fadenpendel (ohne Reibung); in diesem Fall ist $r$ als Fadenlänge zu interpretieren.

## Fallunterscheidung

Beim Verhalten der rollenden Kugel sind im Wesentlichen drei Fälle zu unterscheiden:

- Ist die Ausgangshöhe $H$ kleiner als der Radius $r$ oder gleich groß, so rollt die Kugel hin und her – entsprechend der Schwingung eines Fadenpendels.
- Ist die Ausgangshöhe $H$ größer als der Radius $r$, aber kleiner als $\frac{5}{2}r$, so erreicht die Kugel die obere Hälfte der Kreisbahn, fällt aber irgendwann herunter. Dies geschieht, bevor die Ausgangshöhe wieder erreicht ist, und zwar in dem Moment, in dem die Kontaktkraft der Unterlage wegfällt. Nach dem Verlassen der Kreisbahn fliegt die Kugel (bei vernachlässigtem Luftwiderstand) auf einer Parabel weiter.
- Beträgt die Ausgangshöhe $H$ mindestens $\frac{5}{2}r$, so schafft die Kugel den Überschlag.

**1. Fall:** $H \leq r$

### Maximaler Positionswinkel

Die Kugel erreicht (im Idealfall) bei der Aufwärtsbewegung wieder die Ausgangshöhe $H$. Für den maximalen Positionswinkel $\varphi_1$ gilt in diesem Fall:

$$\cos\varphi_1 = \frac{r-H}{r} \tag{17}$$

### Schwingungsdauer

Die Schwingungsdauer kann mithilfe der folgenden Potenzreihe näherungsweise berechnet werden:

$$\begin{aligned} T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}\Big(1 &+ \frac{1}{16}\varphi_1^2 + \frac{11}{3\,072}\varphi_1^4 + \frac{173}{737\,280}\varphi_1^6 + \frac{22\,931}{1\,321\,205\,760}\varphi_1^8 \\ &+ \frac{1\,319\,183}{951\,268\,147\,200}\varphi_1^{10} + \frac{233\,526\,463}{2\,009\,078\,326\,886\,400}\varphi_1^{12} + \ldots\Big) \end{aligned} \tag{18}$$

Quelle: Wikipedia EN, Pendulum (mathematics)

### Positionswinkel für einen beliebigen Zeitpunkt

Die oben beschriebene Berechnungsmethode für $\varphi(t)$ funktioniert zunächst nur unter der Voraussetzung $t \leq \frac{1}{4}T$. Bei der Bestimmung von $\varphi(t)$ für $t > \frac{1}{4}T$ helfen Symmetrieüberlegungen weiter:

$$\varphi(t) = \varphi(\frac{1}{2}T - t) \tag{19}$$

$$\varphi(t) = 2\pi - \varphi(T - t) \tag{20}$$

Nach der Zeit $T$ wiederholt sich der Schwingungsvorgang:

$$\varphi(kT + t) = \varphi(t) \quad \text{für } k \in \mathbb{Z} \tag{21}$$

## 2. Fall: $r < H < \frac{5}{2}r$

Die Kugel rollt bis in die obere Hälfte der Kreisbahn. Bei einem bestimmten Positionswinkel $\varphi_2$ hebt sie ab und bewegt sich auf einer Wurfparabel weiter.

### Bedingung für das Abheben der Kugel

Den vorhin eingeführten Winkel $\varphi_2$ erhält man dadurch, dass man den Rechenausdruck (15) für den Betrag der Kontaktkraft gleich 0 setzt.

$$\begin{aligned}
\frac{2mg}{r}(H - r) + 3mg\cos\varphi_2 &= 0 \\
2(H - r) + 3r\cos\varphi_2 &= 0 \\
3r\cos\varphi_2 &= 2(r - H) \\
\cos\varphi_2 &= \frac{2(r - H)}{3r} \qquad (22)
\end{aligned}$$

### Zeit bis zum Abheben

Die Zeit vom Durchlaufen des tiefsten Punkts bis zum Abheben der Kugel erhält man, indem man in Gleichung (8) für die obere Integrationsgrenze $\varphi$ den Winkel $\varphi_2$ einsetzt.

## 3. Fall: $H \geq \frac{5}{2}r$

Die Kugel durchläuft die Kreisbahn vollständig.

### Zeit bis zum Erreichen des höchsten Punkts

Für die Zeit vom Durchlaufen des tiefsten Punkts bis zum Erreichen des höchsten Punkts wendet man wieder die Integralformel (8) an, und zwar mit $\pi$ als oberer Integrationsgrenze.

### Zeit für das vollständige Durchlaufen der Kreisbahn

Die Zeit für die Abwärtsbewegung (vom höchsten Punkt bis zum tiefsten Punkt der Kreisbahn) ist genau so groß wie die Zeit für die Aufwärtsbewegung. Die Zeit für das vollständige Durchlaufen der Kreisbahn ist demnach doppelt so groß wie die im letzten Abschnitt erläuterte Zeit bis zum Erreichen des höchsten Punkts.

## Liste der verwendeten Bezeichnungen

| | |
|---|---|
| $a$ | Beschleunigung |
| $F$ | Betrag der Gesamtkraft |
| $F_G$ | Betrag der Gewichtskraft |
| $F_K$ | Betrag der Kontaktkraft |
| $F_r$ | Betrag der Radialkraft |
| $F_t$ | Betrag der Tangentialkraft |
| $g$ | Fallbeschleunigung |
| $H$ | Ausgangshöhe (relativ zum tiefsten Punkt der Kreisbahn) |
| $h$ | Momentane Höhe (relativ zum tiefsten Punkt der Kreisbahn) |
| $m$ | Masse der Kugel |
| $r$ | Radius der Kreisbahn |
| $T$ | Schwingungsdauer für $H \leq r$ |
| $t$ | Zeit (seit dem Durchlaufen des tiefsten Punkts) |
| $v$ | Betrag der Momentangeschwindigkeit |
| $\varphi$ | Positionswinkel (bezüglich des tiefsten Punkts der Kreisbahn) |
| $\dot{\varphi}$ | 1. Ableitung des Positionswinkels $\varphi$ nach der Zeit $t$ |
| $\ddot{\varphi}$ | 2. Ableitung des Positionswinkels $\varphi$ nach der Zeit $t$ |
| $\varphi_1$ | Maximaler Positionswinkel für $H \leq r$ (Umkehr) |
| $\varphi_2$ | Maximaler Positionswinkel für $r < H < \frac{5}{2}r$ (Abheben) |