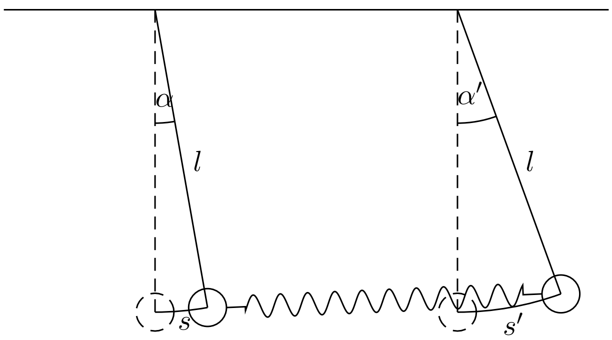
Gekoppelte Fadenpendel

Walter Fendt

8. August 2007

Von **gekoppelten Schwingungen** spricht man, wenn sich mehrere schwingungsfähige Objekte gegenseitig beeinflussen. Ein bekanntes Beispiel wird im Folgenden näher beschrieben.

Versuchsanordnung: Zwei gleichartige Fadenpendel sind durch eine Schraubenfeder geringer Federhärte verbunden. Der Abstand der Aufhängungen ist so gewählt, dass die Feder bei senkrechtem Verlauf der beiden Fäden keine Kraft ausübt. Außerdem wird vorausgesetzt, dass die beiden Pendel gegenüber ihrer Gleichgewichtslage nur wenig ausgelenkt werden. Reibungskräfte sollen vernachlässigt werden.



Die Masse eines Pendelkörpers sei mit m bezeichnet, die Fadenlänge mit l. Die Federkonstante sei D. Das Gesamtsystem hat zwei Freiheitsgrade, da der momentane Zustand durch zwei Koordinaten beschrieben werden kann, beispielsweise durch die Auslenkungswinkel α und α' oder auch durch die entsprechenden Kreisbögen $s = l\alpha$ und $s' = l\alpha'$.

Grundlagen: Kreisfrequenz einer harmonischen Schwingung

Bei einer harmonischen Schwingung einer punktförmigen Masse ist die rücktreibende Kraft F proportional und entgegengesetzt zur Elongation (Auslenkung) s. Diese Tatsache wird durch

$$F = -D^* s$$

ausgedrückt, wobei F bzw. s nicht als Absolutbeträge, sondern als vorzeichenbehaftete Größen aufgefasst werden. Positives Vorzeichen entspricht der rechten Seite, negatives der linken. Der Proportionalitätsfaktor

$$D^* = \left|\frac{F}{s}\right| \tag{1}$$

ist zeitlich konstant und wird als **Richtgröße** bezeichnet. Aus der Richtgröße lässt sich die **Kreisfrequenz** ω einer harmonischen Schwingung berechnen.

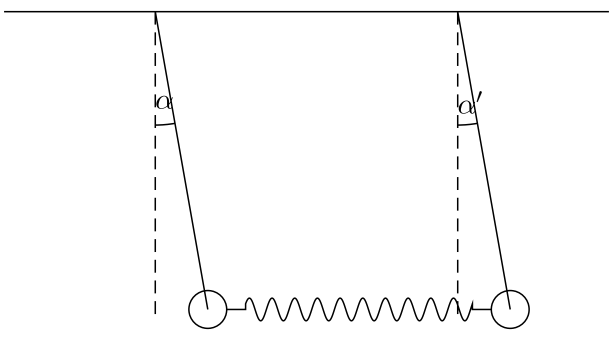
$$\omega = \sqrt{\frac{D^*}{m}} \tag{2}$$

Eigenschwingungen des Systems

Wenn man das Verhalten eines schwingenden Systems durchschauen will, empfiehlt es sich, die so genannten **Eigenschwingungen** zu untersuchen. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass die Teile des Systems entweder gleichphasig oder gegenphasig schwingen. Das vorliegende System hat zwei Freiheitsgrade und dementsprechend auch zwei Eigenschwingungen. Diese sind verhältnismäßig leicht zu finden.

1. Eigenschwingung (gleichphasig)

Bei der ersten Eigenschwingung gilt für die beiden Auslenkungswinkel stets $\alpha' = \alpha$. Die Pendelkörper der beiden Fadenpendel sind also zu jedem Zeitpunkt gegenüber ihrer Ruhelage gleich weit ausgelenkt, wobei sich entweder beide Pendelkörper auf der linken Seite befinden oder beide auf der rechten.



$\alpha' = \alpha$

1. Eigenschwingung: Auslenkungswinkel der beiden Pendelkörper

$$\alpha = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \tag{3}$$
$$\alpha' = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \tag{4}$$

Da der Abstand der beiden Pendelkörper konstant bleibt, wird die Feder weder gedehnt noch gestaucht. Sie hat daher keinen Einfluss auf die Bewegung. Die Richtgröße berechnet sich also wie bei einem einzigen Fadenpendel.

$$D_1^* = \left|\frac{F}{s}\right| = \left|\frac{-mg\sin\alpha}{l\alpha}\right| \approx \frac{mg\alpha}{l\alpha} = \frac{mg}{l}$$

Hier wurde für F die Komponente der Gewichtskraft ($F_G = mg$) in Bewegungsrichtung, also die „Hangabtriebskraft“ $-mg\sin\alpha$ eingesetzt. Die Tatsache, dass diese Kraft nicht genau waagrecht gerichtet ist, kann bei kleinen Auslenkungen vernachlässigt werden. Unter dieser Voraussetzung ist auch die Näherungsformel $\sin\alpha \approx \alpha$ für kleine Winkel berechtigt.

Für die zugehörige Kreisfrequenz erhält man

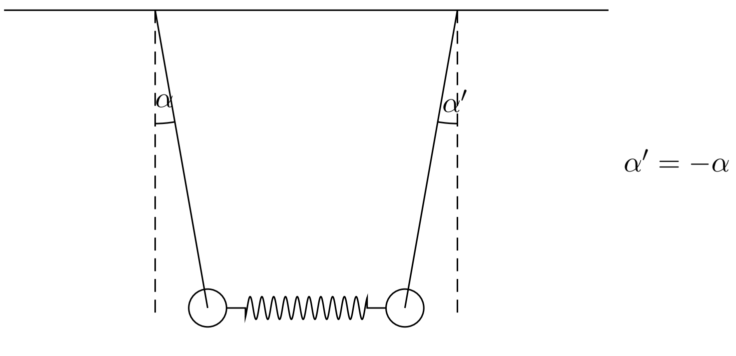
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D_1^*}{m}} = \sqrt{\frac{mg/l}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

1. Eigenschwingung: Kreisfrequenz

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{5}$$

2. Eigenschwingung (gegenphasig)

Auch bei der zweiten Eigenschwingung sind die beiden Pendelkörper immer betragsmäßig gleich weit ausgelenkt. Allerdings befindet sich jeweils ein Pendelkörper links von seiner Ruhelage und einer rechts davon. Es gilt also zu jedem Zeitpunkt $\alpha' = -\alpha$.



2. Eigenschwingung: Auslenkungswinkel der beiden Pendelkörper

$$\alpha = B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \tag{6}$$
$$\alpha' = -B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \tag{7}$$

Die Position des linken Pendelkörpers sei gegeben durch den Winkel α, so dass die momentane Auslenkung gleich $l\alpha$ ist. Auf den Körper wirkt einerseits die „Hangabtriebskraft“ $-mg\sin\alpha \approx -\frac{mgs}{l}$, andererseits – nach dem hookeschen Gesetz – die Federkraft $-D \cdot 2s$. Der Faktor 2 kommt dadurch zustande, dass die Feder auf beiden Seiten jeweils um $|s|$ gedehnt oder zusammengedrückt ist. Es ist zu beachten, dass die Hangabtriebskraft und die Federkraft nicht genau dieselbe Richtung haben. Da jedoch kleine Auslenkungen vorausgesetzt wurden, kann die Gesamtkraft als Summe angesetzt werden.

$$F = -\frac{mgs}{l} - 2Ds$$

Für die Richtgröße ergibt sich somit

$$D_2^* = \left|\frac{F}{s}\right| = \left|-\frac{mg}{l} - 2D\right| = \frac{mg}{l} + 2D.$$

Als Kreisfrequenz der Eigenschwingung erhält man also

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{D_2^*}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2D}{m}}.$$

2. Eigenschwingung: Kreisfrequenz

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2D}{m}} \tag{8}$$

Aufstellung des Differentialgleichungssystems

Obwohl es nach der Bestimmung der Eigenschwingungen eigentlich nicht mehr nötig wäre, soll hier das zugehörige **lineare Differentialgleichungssystem** für die Winkel α und α' aufgestellt werden.

Auf den linken Pendelkörper wirken zwei Kräfte, nämlich die „Hangabtriebskraft“ $-mg\sin\alpha \approx -mg\alpha$ und die Federkraft, für die sich nach dem hookeschen Gesetz $D(l\alpha' - l\alpha) = Dl(\alpha' - \alpha)$ ergibt. Da die Beschleunigung dieses Pendelkörpers gleich $l\ddot{\alpha}$ ist, erhält man aus dem newtonschen Kraftgesetz näherungsweise:

$$\begin{aligned} ml\ddot{\alpha} &= -mg\alpha + Dl(\alpha' - \alpha) \\ &= -(mg + Dl)\alpha + Dl\alpha' \end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für den rechten Pendelkörper:

$$\begin{aligned} ml\ddot{\alpha}' &= -mg\alpha' + Dl(\alpha - \alpha') \\ &= Dl\alpha - (mg + Dl)\alpha' \end{aligned}$$

Differentialgleichungssystem für α und α'

$$ml\ddot{\alpha} = -(mg + Dl)\alpha + Dl\alpha' \tag{9}$$
$$ml\ddot{\alpha}' = Dl\alpha - (mg + Dl)\alpha' \tag{10}$$

Man rechnet leicht nach, dass die in den vorausgegangenen Abschnitten aufgeführten Eigenschwingungen Lösungen dieses Systems sind.

Allgemeine Lösung

In der Theorie der linearen Differentialgleichungssysteme wird bewiesen, dass die Lösungen eines solchen Systems einen Vektorraum bilden. Beim hier betrachteten Problem hat dieser Vektorraum die Dimension 4. Jede der zuvor angegebenen Lösungen für die Eigenschwingungen entspricht einem Vektorraum der Dimension 2, was an den jeweils zwei vorkommenden Konstanten erkennbar ist.

Aus dieser Überlegung ergibt sich, dass man jede mögliche Bewegung der gekoppelten Pendel als Summe dieser beiden speziellen Lösungen, also durch Überlagerung der genannten Eigenschwingungen beschreiben kann.

$$\alpha = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \tag{11}$$
$$\alpha' = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \tag{12}$$

Dabei sind A, B, φ_1 und φ_2 beliebige reelle Konstanten.

Für die Ableitungen nach der Zeit ergibt sich:

$$\dot{\alpha} = -A\omega_1\sin(\omega_1 t + \varphi_1) - B\omega_2\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \tag{13}$$
$$\dot{\alpha}' = -A\omega_1\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B\omega_2\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \tag{14}$$

Lösung des Anfangswertproblems

Bei einem konkreten Anfangswertproblem sind die Konstanten A, B, φ_1 und φ_2 so zu wählen, dass die gegebenen Anfangsbedingungen erfüllt sind.

Anfangsbedingungen: Es wird vorausgesetzt, dass die beiden Pendelkörper um die Winkel α_0 bzw. α'_0 ausgelenkt sind und zur Zeit $t = 0$ (gleichzeitig) losgelassen werden. Einsetzen von $t = 0$ in die Gleichungen (11) und (12) für α und α' muss also die Werte α_0 und α'_0 ergeben. Außerdem muss beim Einsetzen von $t = 0$ in die Gleichungen (13) und (14) für $\dot{\alpha}$ und $\dot{\alpha}'$ jeweils 0 herauskommen.

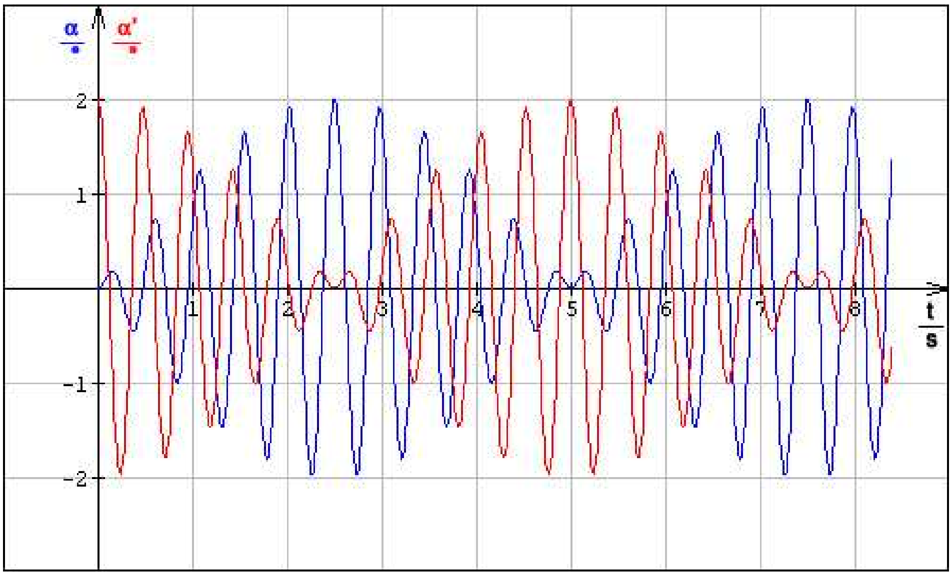
Unter Berücksichtigung von $\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$ erkennt man, dass die geforderten Bedingungen für $A = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha'_0)$, $B = \frac{1}{2}(\alpha_0 - \alpha'_0)$, $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 0$ erfüllt sind.

Auslenkungswinkel der beiden Pendelkörper

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_0')\cos(\omega_1 t) + \tfrac{1}{2}(\alpha_0 - \alpha_0')\cos(\omega_2 t) \tag{15}$$
$$\alpha' = \tfrac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_0')\cos(\omega_1 t) - \tfrac{1}{2}(\alpha_0 - \alpha_0')\cos(\omega_2 t) \tag{16}$$

Beispiel

Das folgende Diagramm zeigt, wie sich bei gekoppelten Pendeln die Auslenkungswinkel der beiden Pendelkörper zeitlich ändern. Beim Loslassen, also zur Zeit $t = 0$, befand sich einer der beiden Pendelkörper in der Mittellage (blaue Kurve), der andere war um 2° ausgelenkt (rote Kurve). Typisch ist, dass die Amplitude (und damit auch die Energie) stets für ein Pendel zu- und für das andere abnimmt. Es findet ein periodischer Energieaustausch statt.



Anhang: Verwendete Bezeichnungen

m	Masse eines (punktförmigen) Pendelkörpers
l	Fadenlänge
D	Federkonstante (-härte)
t	Zeit
α	Auslenkungswinkel des linken Fadenpendels (Bogenmaß, mit Vorzeichen)
α'	Auslenkungswinkel des rechten Fadenpendels (Bogenmaß, mit Vorzeichen)
s	Auslenkung (Elongation) des linken Fadenpendels (mit Vorzeichen)
s'	Auslenkung (Elongation) des rechten Fadenpendels (mit Vorzeichen)
F	rücktreibende Kraft (allgemein bzw. auf einen der beiden Pendelkörper, mit Vorzeichen)
D^*	Richtgröße (allgemein)
ω	Kreisfrequenz (allgemein)
D_1^*	Richtgröße der ersten Eigenschwingung
ω_1	Kreisfrequenz der ersten Eigenschwingung
A, φ_1	Konstanten für erste Eigenschwingung
D_2^*	Richtgröße der zweiten Eigenschwingung
ω_2	Kreisfrequenz der zweiten Eigenschwingung
B, φ_2	Konstanten für zweite Eigenschwingung
F_G	Gewichtskraft
g	Fallbeschleunigung (Ortsfaktor)
α_0	Auslenkungswinkel des linken Federpendels zur Zeit $t = 0$ (Bogenmaß, mit Vorzeichen)
α_0'	Auslenkungswinkel des rechten Federpendels zur Zeit $t = 0$ (Bogenmaß, mit Vorzeichen)